ВНЕУРОЧНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

ОБЩЕИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЕ НАПРАВЛЕНИЕ

Н. Б. Истомина, З. Б. Редько, Н. Б. Тихонова

УЧИМСЯ РЕШАТЬ КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ

Математика и информатика

1–4 классы

Программа
Примерное планирование занятий
Методические рекомендации

Пособие для учителя

Смоленск
Ассоциация XXI век
2018

УДК 373.167.1:51+51(075.2)
ББК 22.1я72
И89

Истомина Н. Б.
И89 **Математика и информатика: Учимся решать комбинаторные задачи.** 1–4 классы / Пособие для учителя – Н. Б. Истомина, З. Б. Редько, Н. Б. Тихонова. – Смоленск: Ассоциация XXI век, 2018. – 44 с. – (Внеурочная деятельность: Общеинтеллектуальное направление). – ISBN 978-5-418-01377-4

УДК 373.167.1:51+51(075.2)
ББК 22.1я72

Пособие предназначено для учителей начальных классов, использующих для организации внеурочной деятельности по общеинтеллектуальному направлению тетради на печатной основе «Учимся решать комбинаторные задачи» для 1–2, 3 и 4 классов общеобразовательных организаций (авторы Н. Б. Истомина, З. Б. Редько, Н. Б. Тихонова, Е. П. Виноградова).

Пособие содержит программу внеурочных занятий (кружка, факультатива) «Учимся решать комбинаторные задачи» для 1–4 классов, примерное планирование внеурочных занятий в 1–4 классах с указанием цели каждого и номеров заданий из тетрадей, методические рекомендации по организации деятельности учащихся при выполнении этих заданий.

Тетради «Учимся решать комбинаторные задачи» для 1–4 классов и методические рекомендации к ним можно использовать на практических занятиях будущих учителей начальных классов в педагогических вузах и колледжах.

ISBN 978-5-418-01377-4

Введение

Образовательные стандарты поставили перед школой задачу общекультурного, личностного и познавательного развития учащихся. Решение поставленной задачи предполагается осуществлять через формирование универсальных учебных действий, обеспечивающих способность учащихся к саморазвитию и самосовершенствованию. Большую роль в достижении метапредметных, а особенно личностных результатов (ценностных ориентиров, потребностей) играет внеурочная деятельность, так как ученик выбирает её, исходя из своих интересов, мотивов.

Под внеурочной деятельностью в рамках реализации ФГОС НОО понимается образовательная деятельность, осуществляемая в формах, отличных от классно-урочной: экскурсии, кружки, секции, круглые столы, конференции, диспуты, школьные научные общества, олимпиады, соревнования, поисковые и научные исследования, общественно полезные практики и т. д.

В ФГОС НОО выделяются следующие направления развития личности во внеурочной деятельности: спортивно-оздоровительное, духовно-нравственное, социальное, общеинтеллектуальное и общекультурное.

Плодотворным для общеинтеллектуального направления внеурочной деятельности является математический материал, в частности различные задачи: арифметические, логические, комбинаторные, геометрические. Овладение учащимися способами решения математических задач способствует не только развитию логического и алгоритмического мышления и воображения учащихся, но и эффективно в плане формирования универсальных учебных действий.

В современном начальном математическом образовании постоянно возрастает роль комбинаторных задач, так как в них заложены большие возможности не только для формирования УУД и для развития мышления учащихся, но и для подготовки их к решению проблем, возникающих в повседневной жизни.

В числе пособий для младших школьников, способствующих организации внеурочных занятий по математике в рамках общеинтеллектуального направления, можно назвать тетради с печатной основой «Учимся решать комбинаторные задачи» для 1–4 классов (авторы Н. Б. Истомина, З. Б. Редько, Н. Б. Тихонова, Е. П. Виноградова), которые используются в практике начальной школы с 2003 года.

В 2014 году содержание тетрадей было переработано и дополнено в соответствии с требованиями стандарта.

Работу по обучению решению комбинаторных задач в форме кружка или факультатива (1 раз в неделю) желательно начинать со второго полугодия 1 класса, когда большинство первоклассников овладеют умениями читать и понимать смысл прочитанного. Однако, как показала практика, работу с тетрадями можно начинать и со второго класса, и даже с третьего. В этом случае учащиеся смогут выполнять на каждом занятии больше заданий, а учитель, ориентируясь на предложенное планирование, внесёт в него соответствующие коррективы.

Базовые понятия комбинаторики, лежащие в основе решения комбинаторных задач (правило суммы, правило произведения и формулы для подсчёта числа отдельных видов комбинаций: перестановок, размещений, сочетаний), известны учителям начальных классов из курса математики в педагогическом вузе или педагогическом колледже.

Поэтому авторы пособия считают возможным привести в пособии краткий справочник по комбинаторике и перечень литературы, которые помогут учителю начальных классов освежить в памяти те или иные понятия комбинаторики и организовать деятельность младшего школьника на внеурочных занятиях с использованием тетрадей «Учимся решать комбинаторные задачи» для 1–4 классов.

Авторы благодарят за участие в подготовке данного пособия учителей многопрофильной гимназии № 4 «Ступени» г. Пензы Люткину Татьяну Александровну, Череватенко Марину Геннадьевну, Коннову Елену Владимировну, Рыбакову Светлану Сергеевну.

Программа внеурочных занятий (кружка, факультатива) общеинтеллектуального направления «Учимся решать комбинаторные задачи» для 1–4 классов

Цель внеурочных занятий (кружка, факультатива) «Учимся решать комбинаторные задачи» – создать дидактические условия для формирования у младших школьников представлений о комбинаторных задачах и способах их решения, для формирования универсальных учебных действий.

Основным средством достижения данной цели являются тетради с печатной основой «Учимся решать комбинаторные задачи».

При составлении заданий тетрадей «Учимся решать комбинаторные задачи» для 1–4 классов авторы руководствовались:

1) требованиями ФГОС НОО к планируемым результатам математической подготовки младших школьников;

2) результатами психологических и методических исследований, связанных с обучением решению комбинаторных задач младшими школьниками;

3) возможностями наглядного представления различных видов комбинаций (размещений, сочетаний, перестановок).

Каждая из данных тетрадей не просто сборник комбинаторных задач, а обучающее пособие, где для каждой задачи разработана система заданий в виде дополнительных вопросов, моделей, различных методических приёмов (сравнение, выбор, преобразование, конструирование и т. д.), следуя которым ученик овладевает комбинаторными, личностными и универсальными учебными действиями.

Приоритетной формой организации деятельности младших школьников на внеурочных занятиях «Учимся решать комбинаторные задачи» является самостоятельная работа, а все обсуждения полученных решений ведутся коллективно. В этом случае каждый ученик может высказать своё мнение, которое его одноклассники, как эксперты, принимают или отвергают, обосновывая причины.

Все записи в тетрадях «Учимся решать комбинаторные задачи» ученики выполняют простым карандашом, чтобы после их обсуждения внести необходимые коррективы. Тем самым на первый план выходит обучающая функция данных тетрадей, когда каждый ребёнок работает на своём уровне (с учётом своей подготовки) и имеет возможность корректировать свои результаты (убирать неверные, вносить изменения в записи и т. д.).

Система комбинаторных задач, предложенная в данных тетрадях, предполагает постепенное знакомство младших школьников с различными способами решения комбинаторных задач: перебор (хаотичный или системный), заполнение таблицы, установление соответствия между элементами двух множеств, построение дерева возможных вариантов, построение графа. Знакомство учащихся с этими способами расширяет их представления о математическом моделировании, оказывает влияние на развитие их мышления и формирование УУД, подготавливает к решению комбинаторных задач с помощью формул в последующих классах.

Предметное содержание тетрадей «Учимся решать комбинаторные задачи»

1–2 классы

Правила суммы и произведения, простейшие комбинации, выполняемые на предметном материале (перестановки, размещения и сочетания).

Хаотичный выбор двух различных предметов из данных трёх и все возможные варианты их расположения.

Выбор всех возможных вариантов двух и трёх различных предметов из данных четырёх предметов.

Расположение трёх (четырёх) различных предметов в одном ряду при данных условиях.

Составление различных наборов элементов при данных условиях.

Нахождение всех возможных вариантов выбора двух, трёх, четырёх предметов из данной совокупности предметов при данном условии.

Знакомство со способом решения комбинаторных задач системным перебором.

Составление таблиц по инструкции.

Решение комбинаторных задач способом установления соответствия.

Решение комбинаторных задач способом составления и анализа таблиц.

3 класс

Правило произведения, простейшие комбинации, выполняемые как на предметном, так и на числовом материале (перестановки, сочетания, размещения, размещения с повторениями), составление таблиц и их анализ, способы решения комбинаторных задач системным перебором, установлением соответствия между элементами двух множеств, построением дерева возможных вариантов.

Способы построения, заполнения и чтения дерева возможных вариантов.

Установление соответствия, заполнение таблицы и дерева возможных вариантов на предметных моделях.

Заполнение и комментирование дерева возможных вариантов на предметных моделях и числовом материале.

Заполнение дерева возможных вариантов по частям, анализ заполненных частей, вывод на основе объединения частей в целое.

Таблица и дерево возможных вариантов как средство проверки полученных результатов.

Различные схемы дерева возможных вариантов в зависимости от условия задачи. Сравнение схем, выявление их сходства и различий.

Построение схемы дерева возможных вариантов на основе анализа текста.

Заполнение и построение схемы дерева возможных вариантов по частям в соответствии с требованием задания.

Различные способы решения комбинаторных задач как средство проверки полученного результата.

4 класс

Простейшие комбинации, выполняемые как на предметном, так и на числовом материале (перестановки, сочетания, размещения, размещения с повторениями), составление таблиц и их анализ, способы решения комбинаторных задач: системный перебор, установление соответствия между элементами двух множеств, построение дерева возможных вариантов.

Ориентированный граф, его элементы. Чтение и построение ориентированного графа, соответствующего данному условию.

Неориентированный граф. Выбор графа, соответствующего данному условию и моделям дерева возможных вариантов.

Анализ графа с целью выделения необходимой информации для ответа на вопросы. Использование графа с целью проверки.

Дополнение текста на основе анализа информации, представленной в схеме (дерево возможных вариантов, граф).

Использование комбинаторных умений для работы с заданиями на порядок выполнения действий в выражениях.

1–2 классы

Примерное планирование занятий с использованием тетради «Учимся решать комбинаторные задачи» (авторы Н. Б. Истомина, З. Б. Редько, Е. П. Виноградова)

№ занятия	Цель занятия	Задания
1	Вводное занятие. Учиться определять количество возможных вариантов выбора одного предмета из данной совокупности.	1, 2
2	Учиться определять количество возможных вариантов выбора одного предмета из данной совокупности.	3, 4
3	Научиться определять количество возможных вариантов расположения трёх цветов. Познакомиться со стихийным и системным перебором возможных вариантов расположения трёх цветов.	5, 6
4	Познакомиться со способом выбора из данных трёх предметов всех вариантов двух различных предметов и всеми возможными вариантами их расположения.	7
5	Осваивать способы выбора из данных трёх предметов всех вариантов двух различных предметов и всех возможных вариантов их расположения.	8
6	Осваивать способы выбора из данных трёх предметов всех вариантов двух различных предметов и всех возможных вариантов их расположения.	9
7	Познакомиться со способом выбора из данных четырёх предметов всех возможных вариантов двух и трёх различных предметов.	10
8	**Самостоятельная работа.** Проверить умение выбирать из данной совокупности предметов в соответствии с условием все возможные варианты выбора двух, трёх, четырёх предметов.	11
9	Осваивать способ возможных вариантов расположения трёх различных предметов в одном ряду.	12, 13

10	Осваивать способ выбора из данной совокупности предметов возможных вариантов двух, трёх, четырёх предметов при данном условии.	14, 15
11	Осваивать способ выбора из данных пяти предметов всех возможных вариантов двух и трёх предметов и способ расположения четырёх предметов при данных условиях.	16,17
12	Осваивать способ выбора из данной совокупности предметов всех возможных вариантов трёх, четырёх и пяти предметов при данных условиях.	18
13	Осваивать способ выбора из пяти предметов всех возможных вариантов двух предметов разной формы.	19
14	Освоить способ выбора из пяти данных предметов всех возможных вариантов двух предметов.	20
15	Освоить способ возможных вариантов расположения трёх различных предметов в один ряд.	21
16	**Самостоятельная работа.** Проверить умения выбирать из данных трёх предметов все возможные варианты двух предметов и все возможные варианты расположения трёх предметов в одном ряду.	22, 23
17	Освоить способ выбора из четырёх разных цветов всех возможных вариантов двух цветов.	24
18	Освоить способ выбора из трёх предметов всех возможных вариантов двух предметов и всех вариантов расположения трёх объектов в одном ряду.	25, 26
19	Освоить способ выбора из десяти данных предметов всех возможных вариантов трёх предметов.	27
20	Освоить способ всех возможных вариантов расположения трёх различных предметов в одном ряду.	28, 29
21	**Самостоятельная работа.** Проверить предметные и комбинаторные умения.	30
22	Освоить способ выбора из пяти предметов всех возможных вариантов двух предметов (системный перебор).	31
23	Освоить способ выбора из четырёх предметов всех возможных вариантов двух предметов (системный перебор).	32

24	Освоить составление различных наборов при данных условиях.	33
25	**Самостоятельная работа.** Проверить умения выбора всех возможных вариантов одного предмета из данной совокупности предметов; выбора из трёх предметов возможных вариантов двух предметов и всех возможных вариантов расположения трёх предметов в одном ряду.	34, 35, 36
26	Научиться составлять таблицы для решения комбинаторных задач, пользуясь инструкцией.	37, 38, 39
27	Научиться составлять таблицы для решения комбинаторных задач.	40, 41, 42
28	Научиться решать комбинаторные задачи способом установления соответствия и составления таблиц.	43
29	Научиться использовать составление таблицы для решения комбинаторных задач.	44, 45
30	Научиться использовать способы установления соответствия и составления таблиц для решения комбинаторных задач.	46, 47
31	Научиться решать комбинаторные задачи, используя способ соответствия и составления таблиц.	48, 49
32	Учиться рассуждать в процессе решения комбинаторных задач.	50
33	**Самостоятельная работа.** Проверить умение решать комбинаторные задачи, используя способы установления соответствия, системного перебора и таблицы.	51, 52

Ориентируясь на данное планирование, учитель может составить свой план, увеличив или уменьшив количество часов на выполнение заданий из тетради «Учимся решать комбинаторные задачи» для 1–2 классов, а также подобрать для занятий с учащимися другие комбинаторные задачи.

Методические рекомендации к занятиям. 1–2 классы

Занятие 1 (вводное). Задания 1, 2

Цель. Учиться определять количество возможных вариантов выбора одного предмета из данной совокупности.

Приступая к работе с данной тетрадью, не следует разъяснять детям термин «комбинаторные задачи». Представление о содержании этого понятия сложится у первоклассников в процессе обучения. Советуем педагогу на первом занятии ограничиться такими вопросами:

– Кто из вас встречался с такими словами (комбинаторные задачи)?

– Кто может что-нибудь рассказать о таких задачах?

– Кто может привести пример комбинаторных задач?

Предполагается, что на все поставленные вопросы будут получены поверхностные ответы или их не будет вовсе.

– Пусть название этой тетради пока останется для нас «секретом», который мы вместе разгадаем. Полагаю, что через некоторое время вы сможете ответить на все эти вопросы.

Задания 1, 2, 3 позволяют выяснить, как учащиеся усвоили предметный смысл сложения, так как их содержание связано с правилом суммы.

Задание 1. Легковую машинку Миша может выбрать четырьмя способами (все они разного цвета и размера), грузовую – пятью (каждая отличается от других), любую машинку – девятью способами, так как всего у мальчика 9 машинок.

Можно «оживить» ситуацию, заранее поручив мальчикам принести на занятие легковые и грузовые машинки. Выставив 4 легковые машинки на демонстрационный стол, учитель приглашает к доске мальчика и предлагает ему взять одну из них.

Далее следует поинтересоваться, сколько вариантов выбора машинки возможно.

Ответ очевиден: мальчик может взять или первую, или вторую, или третью, или четвёртую, то есть возможны 4 варианта выбора, ведь машинок 4.

Обращение к предметным моделям для «оживления» ситуации помогает ребятам осознать происходящее и сделать верный вывод.

Задание 2. У Даши 3 варианта выбора взять чашку в полоску, 4 варианта взять чашку в горошек, 7 вариантов выбора любой чашки.

Для организации дидактической игры целесообразно подготовить модели чайных чашек из плотной бумаги, чтобы с их помощью подтвердить уже выполненные записи.

Информация для учителя. *В некоторых тетрадях «Учимся решать комбинаторные задачи» для 1–2 классов (издание 2015 года) в* ***задании 2*** *нечётко пропечатались полоски на трёх чашках. Следует иметь в виду, что чашек в полоску 3, а чашек в горошек 4.*

Занятие 2. Задания 3, 4

Цель. Учиться определять количество возможных вариантов выбора одного предмета из данной совокупности.

Предваряя работу с ***заданием 3,*** педагог выставляет несколько игрушек на демонстрационный стол (3 куклы или 3 машинки), после чего обращается к классу с предложением выбрать лучшую игрушку. После обсуждения всех возможных вариантов и выбора лучшей игрушки первоклассники самостоятельно работают в тетради. При обсуждении ребята поясняют, что в финале конкурса кошек жюри определяет лучшую кошку в каждой породе. Из сиамских кошек призёра можно выбрать пятью способами. Лучшую кошку из персидских – тремя способами. Лучшую кошку из всех – восемью способами (в этом случае можно сказать о призе зрительских симпатий).

Справка для учителя. *Задания 1, 2 и 3 выполняются на основе правила суммы: если объект* ***а*** *можно выбрать* ***m***

способами, а объект ***b*** *–* ***k*** *способами (не такими, как* ***a****), то выбор либо* ***a****, либо* ***b*** *можно осуществить* ***m*** *+* ***k*** *способами.*

Формулировка ***задания 4*** интересна тем, что в ней не говорится ни о количестве ребят, отправившихся в поход, ни о количестве палаток, которые они с собой взяли. Известно только, что палатки разноцветные: красные, жёлтые, синие, зелёные. Речь идёт о выборе одной палатки из всех взятых в поход. Имеющийся у детей опыт помогает им выполнить простые суждения: оставшейся (лишней) палаткой может быть либо красная, либо жёлтая, либо синяя, либо зелёная.

Занятие 3. Задания 5, 6

Цель. Научиться определять количество возможных вариантов расположения трёх цветов. Познакомиться со стихийным и системным перебором возможных вариантов расположения трёх цветов.

В ***задании 5*** для раскрашивания специально дано пирамидок больше, чем нужно. Это позволяет организовать самостоятельную работу: если ученик ошибётся и не выполнит условие задания, то он зачеркнёт неверно раскрашенную пирамидку. Советуем предложить детям выполнить задание самостоятельно и понаблюдать за их работой. Скорее всего, большинство ребят на этом этапе работы будут действовать хаотично. Однако не следует торопиться с объяснением, а лучше дать ученикам время на раскрашивание пирамидок.

Спустя некоторое время педагог предлагает обсудить в парах:

– Есть ли у вас одинаково раскрашенные пирамидки?

– Есть ли у вас по-разному раскрашенные пирамидки?

– Сколько пирамидок оказалось раскрашено в тетради у каждого?

– Сколько пирамидок осталось нераскрашенными?

Желательно вынести данные рисунки на доску, пригласить к доске детей, дать им цветные мелки и обсудить варианты раскрашивания. Вместо закрашивания каждого кольца пирамидки можно на нём (или рядом) ставить цветную галочку.

Подводя итог, следует воспользоваться условными обозначениями и записать на доске варианты раскрашивания пирамидок так, чтобы они отличались друг от друга (КСЖ, КЖС и т. д.).

Ответ: 6 пирамидок, два рисунка лишних, это «ловушка».

Справка для учителя. *В задании находится число перестановок из трёх элементов:* $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Задание 6. Чтобы дети не действовали хаотично, раскрашивая полоски, советуем обсудить, как может быть раскрашен первый флажок, если верхняя полоска у него красная. Учащиеся могут рассуждать так:

– Если верхняя полоска красная, то вторая будет либо синей, либо белой. (Рекомендуем выставить на доску полоски бумаги соответствующего цвета.)

Учитель предлагает классу продолжить раскрашивание самостоятельно: либо отмечая цветными галочками полоски, либо вписывая простым карандашом буквы К, Б, С.

На доске советуем зафиксировать порядок раскрашивания двух первых флажков:

КСБ КБС

Обсуждение полученных результатов выполняется коллективно, на доске появляются варианты:

БКС СКБ
БСК СБК

Один флажок – лишний, это «ловушка».

Возможен и другой вариант организации деятельности учащихся, когда класс работает самостоятельно. Если ученики уверенно и быстро справляются с раскрашиванием флажков, педагог предлагает ребятам составить флажки из цветных полосок одинаковой длины, подготовленных заранее. Ребята попарно выходят к доске и с помощью магнитов прикрепляют к доске бумажные полосы так, чтобы получились различные флажки.

Можно предложить ребятам найти из закрашенных флажков тот, полоски на котором расположены так же, как и на флаге России.

Справка для учителя. *В задании находится число перестановок из трёх элементов:* $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Ответ: 6 флажков.

Занятие 4. Задание 7

Цель. Познакомиться со способом выбора из данных трёх предметов всех вариантов двух различных предметов и всеми возможными вариантами их расположения.

Задание 7. Речь идёт о выборе двух чашек из трёх данных. Чашки одинаковой формы, но с разным количеством красных кружков на каждой (2, 4 и 6).

В пункте а) изображены 3 пары чашек, так как возможны только 3 варианта выбора. Вполне вероятно, что на этом этапе работы большинству детей нужно обратиться к предметным моделям, чтобы понять смысл происходящего. Советуем подготовить 3 чайные чашки (надписать номера 1, 2, 3) или их модели из плотного картона (тогда получится так, как в тетради) и, приглашая учеников, заняться выбором. Следует в каждом случае фиксировать выбор пары чашек и сверять его с уже имеющимися записями в тетрадях (1 и 2, 1 и 3, 2 и 3).

Ответ: получится 3 варианта выбора двух чашек из трёх.

Справка для учителя. *Так как в задании порядок выбора чашек не играет роли, то речь идёт о числе сочетаний из трёх по два:* $C_3^2 = \dfrac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$.

В отличие от п. а), в п. б) очень важно, в каком порядке чашки расставляют на полке. Дети легко решают эту задачу на предметном уровне, раскрашивая предложенные в тетради пары чашек. Для каждой пары чашек возможны 2 варианта расстановки их на полке. Так как у нас 3 пары чашек, всего будет 6 вариантов расстановки.

Справка для учителя. *В задании находится число размещений без повторений из трёх элементов по два:* $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$.

Занятия 5, 6. Задания 8, 9

Цель. Осваивать способы выбора из данных трёх предметов всех вариантов двух различных предметов и всех возможных вариантов их расположения.

Задание 8. В отличие от ***заданий 5*** и ***6***, в тексте каждого из которых предлагались некоторые указания к действию, в данном случае учащиеся выбирают две рамки из трёх данных самостоятельно (никаких указаний не предлагается). Дети читают текст задания (сначала вслух, потом про себя), рассматривают рисунки рамок. Затем знакомятся с требованием «нарисуй возможные варианты выбора двух рамок». Важно обратить внимание первоклассников на то, что при выборе двух рамок их порядок может быть любым. После чего ребята самостоятельно рисуют (простым карандашом!) варианты подарка. Советуем дать классу минут 10–15 на выполнение этой трудоёмкой части работы, ведь ученикам нужно не только анализировать рисунки рамок и рассуждать, выделяя пару, но и рисовать эти рамки.

Для обсуждения результатов советуем заранее подготовить рамки для фотографий прямоугольной формы (или их модели из плотной бумаги или проволоки). Обсуждение можно организовать в игровой форме: педагог приглашает к доске девочку, которая будет выбирать две рамки для подарка, а класс будет наблюдать за её действиями и оценивать их. Если, например, сначала Лена выбрала первую рамку, второй может быть любая из оставшихся: или вторая, или третья. Получаем такие наборы: 1 и 2, 1 и 3. Возможен вариант выбора 2-й и 3-й рамок.

Ответ: у Лены 3 варианта выбора двух рамок.

Справка для учителя. *В данном случае речь идёт о числе сочетаний из трёх по два, так как порядок выбора предметов не играет роли:* $C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3.$

Задание 9 аналогично ***заданиям 5*** и ***6***. В п. а) учащиеся самостоятельно выполняют раскрашивание кубиков (их дано больше, чем требуется). Можно раскрасить только 6 различных башен.

Для проверки желательно подготовить кубики соответствующих цветов. Крайне важно соотносить уже выполненную работу с предметными действиями. Не следует отказываться от действий с моделями кубов: это помогает большинству детей понять способ действия при выборе вариантов различного расположения данных трёх предметов.

Ответы на вопросы б) – в) – г) помогут детям проверить свой ответ в предыдущем п. а). В каждом из пунктов б) – в) – г) получается по две башни, а всего – 6 башен.

Справка для учителя. *В задании находится число перестановок из трёх элементов:* $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Занятие 7. Задание 10

Цель. Познакомиться со способом выбора из данных четырёх предметов всех возможных вариантов двух и трёх различных предметов.

Задание 10. В п. а) пар кружек изображено больше, чем требуется. В соответствии с условием получится 6 вариантов выбора пары кружек.

КЗ	КС	КЖ
ЗС	ЗЖ	СЖ

Советуем предложить классу самостоятельно выполнить п. а), а обсуждение результатов начать с пояснения: порядок кружек в паре не важен, то есть пара КЗ и пара ЗК – это одна и та же пара. Способ действия подготавливает детей к выполнению системного перебора: «Если для подарка я беру красную кружку, то к ней в пару можно поставить или зелёную, или синюю, или жёлтую».

В п. б) возможны 4 варианта и число нарисованных кружек соответствует ответу.

Ситуацию в п. б) советуем «оживить», то есть обыграть её практически: на стол поставить четыре кружки разного цвета и вызвать поочерёдно 4 пары учеников. Один из пары выбирает 3 кружки, второй делает записи на доске, пользуясь условными обозначениями.

1) КЗС	2) КЗЖ
3) ЗСЖ	4) СЖК

Все остальные учащиеся внимательно следят, не допустят ли одноклассники ошибок или повторов при выборе трёх кружек. Следует учитывать, что порядок выбора кружек неважен, то есть набор вида КЗС и набор вида ЗСК (или набор СКЗ) – это один и тот же набор.

Справка для учителя. *В задании находится число сочетаний:*

а) из четырёх по два: $C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6;$

б) из четырёх по три: $C_4^3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4.$

Можно предложить ребятам найти более простое решение, находя варианты не выбранных кружек, а оставшихся. В этом случае можно предложить ответить на вопросы: сколько кружек останется, если мы выберем три кружки из четырёх? (Одна.) Сколько существует вариантов выбрать одну кружку из четырёх? (Четыре.)

Желательно сначала записать все варианты: 1) К; 2) З; 3) С; 4) Ж; а затем рядом с каждым в скобках указать, какие кружки остались после выбора одной.

1) К (ЗСЖ) 2) З (КСЖ)
3) С (КЗЖ) 4) Ж (КЗС)

После можно сравнить найденные варианты с теми, что были найдены при выполнении п. б).

Важно сделать вывод, почему получается одинаковое количество вариантов выбора **одной** и **трёх** кружек **из четырёх.** Потому что это один и тот же выбор, только разные рассуждения. Когда выбираем одну кружку из четырёх, остаются три, а когда выбираем три кружки, остаётся одна. Этот вывод важен для поиска более простых решений в комбинаторных задачах.

Справка для учителя. *Полученный вывод является иллюстрацией одного из свойств числа сочетаний из n по k:* $C_n^k = C_n^{n-k}$. *В данном случае* $C_4^3 = C_4^{4-3} = C_4^1$.

Занятие 8. Задание 11

Цель. Самостоятельная работа. Проверить умение выбирать из данной совокупности предметов в соответствии с условием все возможные варианты выбора двух, трёх, четырёх предметов.

Задание 11 предлагается для самостоятельной работы, при выполнении которой педагог никак не комментирует способы действия, выбор карандашей и т. д. Педагогу следует запастись терпением и в течение 10–15 минут только наблюдать за работой своих подопечных. Ситуация знакома большинству ребят, все проверяемые умения формировались на протяжении предыдущих семи занятий.

При обсуждении полученных результатов важно обратить внимание на то, как дети удерживают требование каждого пункта: удалось им отследить то, что выбранная Димой пара яблок может быть различной. Это значит, что по составу пары яблок могут отличаться друг от друга, а пары ЖЗ и ЗЖ – это одна и та же пара, то есть повторов в раскрашивании быть не должно.

В пункте а) может быть: 1) 2 зелёных яблока; 2) 2 жёлтых; 3) одно зелёное и одно жёлтое. Четвёртый рисунок – «ловушка». Ребята могут в каком-либо варианте поменять местами жёлтое и зелёное яблоки, но этот ответ будет неверным, так как порядок расположения яблок в паре несущественен.

а) Ответ: 3 варианта выбора двух яблок из четырёх жёлтых и двух зелёных.

Аналогично следует действовать и при выполнении пункта б). Здесь возможны варианты ЖЖЖ, ЖЖЗ, ЖЗЗ. Четвёртый рисунок – «ловушка».

б) Ответ: 3 варианта выбора трёх яблок из четырёх жёлтых и двух зелёных.

В пункте в) также возможны 3 варианта выбора четырёх яблок из шести данных: 1) либо все яблоки жёлтые; 2) либо два жёлтых и два зелёных; 3) либо 3 жёлтых и 1 зелёное. Четвёртый рисунок – «ловушка».

в) Ответ: 3 варианта выбора четырёх яблок из четырёх жёлтых и двух зелёных.

В пункте в), анализируя возможные варианты выбора четырёх яблок из шести (ЖЖЖЖ, ЖЖЖЗ, ЖЖЗЗ), педагог предлагает классу составить числовые равенства, соответствующие полученным вариантам, и пояснить, что обозначает каждая цифра в записи каждого: $4 + 0 = 4$, $3 + 1 = 4$, $2 + 2 = 4$, где первое слагаемое указывает количество жёлтых яблок, а второе – зелёных.

Занятие 9. Задания 12, 13

Цель. Осваивать способ возможных вариантов расположения трёх различных предметов в одном ряду.

Задание 12. Аналогично ***заданиям 5*** и ***6***. Два рисунка – «ловушки».

Ответ: 6 вариантов расположения трёх яблок в ряд.

Задание 13. См. ***задания 5, 6 и 12***. Одна полоска для раскрашивания лишняя, это «ловушка».

Ответ: 6 различных вариантов трёхцветной полоски.

Справка для учителя. *В заданиях 12 и 13 находится число перестановок из трёх элементов:* $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Занятие 10. Задания 14, 15

Цель. Осваивать способ выбора из данной совокупности предметов возможных вариантов двух, трёх, четырёх предметов при данном условии.

В отличие от предыдущих заданий в ***задании 14*** не указано количество красных и синих шариков в мешочке (их много). В п. а) шарики могут быть: оба красные, оба синие, один красный и один синий.

Результаты рассуждений можно записать в таблицу

Вариант выбора	Количество	Количество	Всего шариков
1-й	0	2	2
2-й	1	1	2
3-й	2	0	2

и выражениями 0 + 2; 1 + 1; 2 + 0.
а) Ответ: 3 варианта.

В п. б) шарики могут быть: все три красные, все три синие, один красный и два синих, один синий и два красных.

Результаты рассуждений можно записать в таблицу

Вариант выбора	Количество 🔴	Количество 🔵	Всего шариков
1-й	0	3	3
2-й	1	2	3
3-й	2	1	3
4-й	3	0	3

и выражениями 0 + 3; 1 + 2; 2 + 1; 3 + 0.
б) Ответ: 4 варианта.

В пункте в): все четыре шарика красные, все четыре шарика синие, один красный и три синих, один синий и три красных, два синих и два красных.

Результаты можно записать в таблицу.

Вариант выбора	Количество 🔴	Количество 🔵	Всего шариков
1-й	0	4	4
2-й	1	3	4
3-й	2	2	4
4-й	3	1	4
5-й	4	0	4

и выражениями 0 + 4; 1 + 3; 2 + 2; 3 + 1; 4 + 0.
в) Ответ: 5 вариантов.

В ходе выполнения ***задания 15*** учащиеся используют имеющиеся у них представления о форме. Важно учесть требование: нужно выбрать два шарика различной формы. Дети рассматривают рисунки воздушных шариков, выделяя их форму и цвет, а затем анализируют и отмечают рисунки соответствующих пар. Советуем обратить внимание на то, что при выборе двух шариков в соответствии с требованием задания не имеет значения их расположение в паре (какой из них находится справа, а какой – слева).

Ответ: 5 вариантов выбора двух воздушных шариков различной формы.

Занятие 11. Задания 16, 17

Цель. Осваивать способ выбора возможных вариантов двух и трёх предметов из данных пяти. Повторить способ расположения четырёх предметов при данных условиях.

Задание 16 выполняется аналогично ***заданию 14***. Анализ рисунка позволяет учащимся сделать выбор в п. а), в котором возможны 10 вариантов выбора. 2 рисунка – «ловушки».

Справка для учителя. *В задании находится число сочетаний из пяти по два:* $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$.

При выполнении п. б) советуем поинтересоваться, в каком случае будет больше вариантов выбора: когда нужно выбрать 2 мелка из пяти или 3 мелка из пяти.

Для ответа на этот вопрос можно обратиться к выводам, полученным при выполнении ***задания 10***.

Количество вариантов выбора одной и трёх кружек из четырёх одинаково, так как это один и тот же выбор, но с разными приоритетами: когда выбираем одну кружку из четырёх, остаются три, а когда выбираем три кружки, остаётся одна.

Этот вывод важно обобщить и для пяти объектов: выбрать для рисования два мелка из пяти – это всё равно что выбрать, какие три мелка из пяти не использовать для рисования.

Справка для учителя. *Это вывод также является иллюстрацией одного из свойств числа сочетаний из n по k:* $C_n^k = C_n^{n-k}$. *В данном случае* $C_5^3 = C_5^{5-3} = C_5^2$.

Задание 17. Дети читают текст, анализируют условие и приступают к самостоятельному раскрашиванию кубиков. Первый кубик уже раскрашен (он жёлтый), третий должен быть красным. На третьем кубике дети могут поставить ✓ простым карандашом или написать на нём букву ***к***. Осталось два незакрашенных кубика. Один из них зелёный, другой – синий. Значит, если синий кубик – второй, то зелёный – четвёртый (и наоборот).

Итак, раскрашивание будет таким: ЖСКЗ или ЖЗКС.

Два рисунка – «ловушки».

Ответ: получилось 2 варианта.

Справка для учителя. *В задании из четырёх кубиков переставляются только два, то есть находится число перестановок из двух элементов:* $P_2 = 2! = 2 \cdot 1 = 2$.

Занятие 12. Задание 18

Цель. Осваивать способ выбора из данной совокупности предметов всех возможных вариантов трёх, четырёх и пяти предметов при данных условиях.

Задание 18. Ответы: а) 4 варианта выбора трёх горшочков; б) 5 вариантов выбора четырёх горшочков; в) 5 вариантов выбора пяти горшочков.

После того как дети закончат работу в тетрадях, обсуждение полученных результатов целесообразно провести коллективно – в форме игры, для которой учитель заранее подготовит модели горшочков.

Записывать результаты удобно в таблице, которую можно вынести на доску, или выражениями.

Например, для задания из пункта б) записи будут такими:

1) $0 + 4$; 2) $1 + 3$; 3) $2 + 2$; 4) $3 + 1$; 5) $4 + 0$.

Вариант выбора	Количество 	Количество 	Всего горшочков
1-й	0	4	4
2-й	1	3	4
3-й	2	2	4
4-й	3	1	4
5-й	4	0	4

Занятие 13. Задание 19

Цель. Осваивать способ выбора из пяти предметов всех возможных вариантов двух предметов разной формы.

Формулировка ***задания 19*** отличается от предыдущих: помимо текста информация представлена в виде таблицы, анализируя которую дети обращают внимание на то, что форма коробки и форма конфет из каждой данной коробки совпадают.

Итак, нужно выбрать две конфеты из данных пяти. Порядок их расположения в паре не имеет значения. Начать работу можно с анализа уже имеющихся вариантов выбора двух конфет. Важно, чтобы дети зачеркнули две пары конфет одинаковой формы (во втором ряду – две конфеты шестиугольной формы, а в третьем ряду есть две круглые конфеты). Все остальные варианты соответствуют требованию задания. Их ровно 10. Далее советуем обсудить все данные пары конфет. Представим, что ученик выбирает первую конфету в форме квадрата, форма второй может быть: 1) круглой; 2) шестиугольной; 3) треугольной; 4) сердечком. В этом случае возможны 4 варианта выбора двух конфет разной формы. Далее школьник может взять первой круглую конфету, тогда получатся такие варианты: 1) круглая – шестиугольная; 2) круглая – треугольная; 3) круглая – сердечком; а четвёртый вариант (круглая – квадратная) уже был выбран в предыдущем рассуждении. Получаем 3 возможных варианта выбора двух конфет разной формы. Далее можно первой взять шестиугольную конфету: 1) шестиугольная – треугольная; 2) шестиугольная – сердечком. И наконец, возможен ещё один вариант выбора двух конфет: треугольная – сердечком.

Ответ: 10 вариантов выбора двух конфет получилось.

Справка для учителя. *В задании находится число сочетаний из пяти по два:* $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$.

Проверку результата можно выполнить системным перебором. Педагог предлагает ребятам обозначить каждую из данных форм первой буквой её названия и обсудить такую запись решения, в которой в каждом столбце одна и та же форма конфеты всегда слева, а справа форма конфеты изменяется.

Условные обозначения	П	К	Ш	Т	С

ПК	КШ	ШТ	ТС
ПШ	КТ	ШС	
ПТ	КС		
ПС			

Ответ: 10 вариантов выбора двух конфет получилось.

Занятие 14. Задание 20

Цель. Освоить способ выбора из пяти данных предметов всех возможных вариантов двух предметов.

Задание 20. Варианты выбора двух кружек, которые может взять мама для угощения двух соседских ребят, уже даны в столбцах. Ученикам нужно только вписать буквы на кружки. Если мама сначала возьмёт свою кружку с буквой М, то возможны такие варианты выбора двух чашек:

МП МБ МК МС

Далее ученики могут в парах обсудить, какие ещё две кружки может взять мама. Например, мама возьмёт кружку Кати и ещё какую-нибудь из оставшихся. Следует только учесть, что пара кружек МК – это пара КМ, то есть одна и та же пара. Поэтому если первой мама берёт кружку Кати, то новых вариантов выбора двух кружек будет 3.

Ответ: 10 вариантов выбора двух кружек возможны.

Справка для учителя. *В задании находится число сочетаний из пяти по два:* $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$.

Занятие 15. Задание 21

Цель. Освоить способ возможных вариантов расположения трёх различных предметов в один ряд.

Задание 21. Аналогично ***заданиям 5, 6, 9, 12*** и ***13***. Дети обращают внимание на то, что шапочки отличаются только цветом помпонов. Организовать деятельность учащихся возможно по-разному.

1) Самостоятельное выполнение с последующим обсуждением, в ходе которого проявится способ действия большинства учащихся – системный перебор или пока ещё хаотичный. Если многие дети действовали хаотично, в ходе обсуждения результатов педагог ориентирует класс на системный перебор. Для этого учитель выписывает на доску условные обозначения:

КСЗ
КЗС

и обращается к ребятам с просьбой пояснить, что обозначают эти записи. Далее в процессе обсуждения появляются и другие записи (СКЗ и СЗК, ЗКС и ЗСК).

2) Дети читают текст, знакомятся с требованием задания и высказывают предположения о том или ином порядке раскрашивания помпонов. Например, ученики предлагают раскрасить красным карандашом первый помпон в первой паре. Весь класс выполняет эту установку, но затем самостоятельно ученики раскрашивают помпоны на двух других шапках.

Ответ: 6 вариантов.

Для организации проверки советуем приготовить цветные круги – модели помпонов (по 6 каждого цвета), которые ребята будут выставлять на доску для обоснования своего варианта расположения шапочек на полке.

Справка для учителя. *В задании находится число перестановок из трёх элементов:* $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Занятие 16. Задания 22, 23

Цель. Самостоятельная работа. Проверить умения выбирать из данных трёх предметов все возможные варианты двух предметов и все возможные варианты расположения трёх предметов в одном ряду.

Задание 22. Вид запасов дети обозначают буквами (Б, Л, С) и размещают их по кладовым (например, так: БЛ, БС, ЛС).

Справка для учителя. *В задании находится число сочетаний из трёх по два:* $C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$.

Ответ: хватит.

Задание 23. Буквы можно расположить в клеточках по-разному шестью способами. Слова, имеющие смысл «нос», «сон».

Советуем предложить детям составить предложения со словами «нос» и «сон».

Справка для учителя. *В задании находится число перестановок из трёх элементов:* $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Занятие 17. Задание 24

Цель. Освоить способ выбора из четырёх разных цветов всех возможных вариантов двух цветов.

Задание 24. Задание можно предложить для самостоятельной работы.

При выполнении следует учесть, что пары шаров могут быть шести вариантов (К – Ж, К – З, К – С, Ж – З, Ж – С, З – С). Некоторые дети, возможно, будут менять шары местами. Следует обсудить, что при составлении наборов из двух шаров не имеет значения, какой шар будет слева, а какой – справа.

Ответ: 6 вариантов. Остальные 3 пары – «ловушки».

Справка для учителя. *В задании находится число сочетаний из четырёх по два:* $C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$.

Занятие 18. Задания 25, 26

Цель. Освоить способ выбора из трёх предметов всех возможных вариантов двух предметов и всех вариантов расположения трёх объектов в одном ряду.

Задание 25 можно предложить для самостоятельной работы. Возможны три варианта выбора двух кистей (1 и 2, 1 и 3, 2 и 3), так как речь идёт о выборе двух элементов из трёх данных.

Справка для учителя. *В задании находится число сочетаний из трёх по два:* $C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$.

В ***задании 26***, в отличие от предыдущего, важен порядок расположения элементов, так как они переставляются. Ребята записывают все возможные варианты расположения предметов в ряд, используя условные обозначения двух видов: буквами и цифрами. Можно организовать работу по вариантам (1-й вариант использует условные обозначения в виде букв, а 2-й вариант – в виде цифр), затем учащиеся обмениваются тетрадями и проверяют друг друга.

Ответ: 6 вариантов. Отметить ✓ нужно вариант ВТЛ или 1 3 2.

Справка для учителя. *В задании находится число перестановок из трёх элементов:* $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Занятие 19. Задание 27

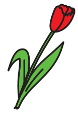
Цель. Освоить способ выбора из десяти данных предметов всех возможных вариантов трёх предметов.

Задание 27 ученики выполняют самостоятельно способом перебора, так как необходимо учитывать количество тюльпанов каждого цвета.

Отметим, что порядок расположения трёх тюльпанов в букете не важен, то есть букет ЖБК, или ЖКБ, или КБЖ и т. д. – это один и тот же букет.

Ответ: 9 разных букетов из трёх тюльпанов может получиться.

Результаты обсуждений удобно представить в таблице, выбрав определённый принцип её заполнения, например увеличение или уменьшение количества жёлтых (красных, белых) тюльпанов в букете.

Вариант составления букета	Количество 	Количество 	Количество 
1-й	0	1	2
2-й	0	2	1
3-й	0	3	0
4-й	1	0	2
5-й	1	1	1
6-й	1	2	0
7-й	2	0	1
8-й	2	1	0
9-й	3	0	0

Занятие 20. Задания 28, 29

Цель. Освоить способ всех возможных вариантов расположения трёх различных предметов в одном ряду.

Задание 28. Ситуация в задании знакома большинству учащихся. Советуем дать детям возможность выполнить пункт а) самостоятельно, а затем обсудить вписанные слова коллективно.

Если место 4 занял папа, то рядом с ним, на месте 5, может сидеть или мама, или Света.

Чтобы выяснить, как ученики понимают смысл текста, учитель предлагает им продолжить начатое рассуждение.

– А кто ещё, кроме папы, мог занять 4-е место? (Мама или дочь.)

Предложите ребятам построить рассуждения по аналогии:

Если место 4 займёт **дочь Света**, ***то рядом с ней,*** **на месте 5**, ***может сидеть или*** **мама**, ***или*** **папа**.

Если место 4 займёт **мама**, ***то рядом с ней,*** **на месте 5**, ***может сидеть или*** **дочь Света**, ***или*** **папа**.

Табличный способ помогает учащимся справиться с перебором без помощи учителя. Тем не менее желательно обратить внимание детей на то, что в таблице на месте 4 дважды указан папа. Следует выяснить почему. Многие дети дадут верный ответ: потому что на месте 5 может сидеть или мама, или Света. Далее учащиеся приступают к заполнению таблицы простым карандашом.

Место 4	Место 5	Место 6
П	М	С
П	С	М
М	П	С
М	С	П
С	М	П
С	П	М

Ответ в п. в): шестью способами можно рассадить всех членов семьи на 3 места. Ответ в пункте г): 2 способа.

Справка для учителя. *В задании находится число перестановок из трёх элементов:* $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Задание 29 можно предложить для самостоятельной работы, так как оно отличается от предыдущих только сюжетом.

Ответ: 6 вариантов.

Справка для учителя. *В задании находится число перестановок из трёх элементов:* $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Занятие 21. Задание 30

Цель. Самостоятельная работа. Проверить предметные и комбинаторные умения.

Задание 30 ориентирует ребят на использование знаний о составе числа 11 (2 и 9, 3 и 8, 4 и 7, 5 и 6).

Ответ: 4 варианта секретного кода.

Желательно продолжить работу с заданием и задать классу вопрос:

– Через какое время Миша сможет уехать на велосипеде, если на проверку каждого варианта он тратит одну минуту и код замка угадает с последней попытки? (Через 4 минуты.)

Учитель может изменить требование для кода замка: например, он состоит из двух однозначных чисел, сумма которых равна 11. Тогда вариантов кода будет 8 (2 и 9, 9 и 2, 3 и 8, 8 и 3, 4 и 7, 7 и 4, 5 и 6, 6 и 5).

Занятия 22, 23. Задания 31, 32

Цель. Освоить способ выбора из четырёх предметов всех возможных вариантов двух предметов (системный перебор).

Задания 31, 32 можно предложить для самостоятельной работы, так как они отличаются от предыдущих либо сюжетом, либо количеством предметов.

Задание 31. Для проверки можно подготовить либо картинки с изображением насекомых, либо карточки с буквами – условными обозначениями этих насекомых.

Некоторые ученики могут заметить, что на цветочной клумбе сидело 5 насекомых, а все возможные варианты выбора мы выполняем для четырёх. В этом случае можно вынести на доску 5 столбцов записей и начать их заполнение с первого столбца, в котором в паре улетевших насекомых будет шмель.

ШЖ	Ж	С	Б	М
ШС				
ШБ				
ШМ				

Затем дети заполняют 2-й столбец, в котором в паре улетевших насекомых будет жук, учитывая, что пара «жук – шмель» уже была записана в первом столбце.

ШЖ	ЖС	С	Б	М
ШС	ЖБ			
ШБ	ЖМ			
ШМ				

Аналогично заполняются другие столбцы.

ШЖ	ЖС	СБ	БМ	**М**
ШС	ЖБ	СМ		
ШБ	ЖМ			
ШМ				

Советуем учителю подчеркнуть букву М и обратиться к классу:

– Столбец с буквой М не заполнен. Значит ли это, что муха не улетала с клумбы?

– Или всё-таки муха могла улететь?

– Назовите насекомых, которые могли бы улететь в паре с мухой. (Шмель, жук, стрекоза, божья коровка.)

Далее ученики делают вывод: пары, в которых есть муха, уже записаны в других столбцах.

Ответ: 10 вариантов выбора двух насекомых.

Справка для учителя. *В задании находится число сочетаний из пяти по два:* $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10.$

Задание 32. Ответ: 6 вариантов выбора двух матрёшек. Одна пара клеток – «ловушка».

Справка для учителя. *В задании находится число сочетаний из четырёх по два:* $C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6.$

Занятие 24. Задание 33

Цель. Освоить составление различных наборов при данных условиях.

Задание 33 аналогично ***заданию 18***.

а) Ответ: 3 варианта выбора пяти кругов из четырёх красных и трёх зелёных.

б) Ответ: 4 варианта выбора трёх кругов из четырёх красных и трёх зелёных.

в) Ответ: 4 варианта выбора четырёх кругов из четырёх красных и трёх зелёных.

Советуем для проверки полученных результатов заготовить модели кругов, с помощью которых учащиеся составят различные наборы в соответствии с требованием каждого пункта, а результаты запишут в таблицах.

а)

Вариант выбора	Количество 🔴	Количество 🟢	Всего шариков
1-й	4	1	5
2-й	3	2	5
3-й	2	3	5

б)

Вариант выбора	Количество 🔴	Количество 🟢	Всего шариков
1-й	0	3	3
2-й	1	2	3
3-й	2	1	3
4-й	3	0	3

в)

Вариант выбора	Количество 🔴	Количество 🟢	Всего шариков
1-й	1	3	4
2-й	2	2	4
3-й	3	1	4
4-й	4	0	4

Занятие 25. Задания 34–36

Цель. Самостоятельная работа. Проверить умение находить все возможные варианты выбора одного предмета из данной совокупности предметов; выбора из трёх предметов возможных вариантов двух предметов и всех возможных вариантов расположения трёх предметов в одном ряду.

Задание 34. Буквы можно расположить в клеточках по-разному шестью способами. Слова, имеющие смысл «кто», «кот», «ток». Можно предложить детям составить предложения с этими словами.

Справка для учителя. *В задании находится число перестановок из трёх элементов:* $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Задание 35. См. рекомендации к ***заданиям 1, 2, 3***.

При выполнении ***задания 36*** учащиеся знакомятся с различными правилами составления (заполнения) таблицы, которыми можно пользоваться в дальнейшем при решении комбинаторных задач. Анализируя записи в каждой таблице, дети находят правило, по которому она составлена.

Правило для таблицы 1): сумма чисел по горизонтали и вертикали (все вычисления в пределах десяти).

Правило для таблицы 2): в каждой клетке таблицы – двузначное число, в котором первая цифра – разряд десятков, вторая цифра – разряд единиц.

Занятие 26. Задания 37–39

Цель. Научиться составлять таблицы для решения комбинаторных задач, пользуясь инструкцией.

В ***заданиях 37, 38*** продолжается работа по выявлению правил составления (заполнения) таблицы, которыми можно пользоваться в дальнейшем при решении комбинаторных задач.

Задание 37 – для самостоятельной работы. Дети соотносят фигуры и их возможный цвет. В первом ряду получится 4 прямоугольника (красный, жёлтый, чёрный и зелёный), во втором – 4 квадрата (красный, жёлтый, чёрный и зелёный). Изображать фигуры в таблице можно от руки, но по клеточкам.

Процесс выполнения ***задания 38*** состоит из нескольких этапов:

1) чтение текста;

2) анализ таблицы в п. а), в ходе которого выясняется:

• что обозначают записи (КС и ЗЖ) в первой и третьей строках таблицы;

• почему зачёркнуты 4 клетки таблицы;

3) заполнение таблицы;

4) закрашивание пар клеток таблицы, в которых записан один и тот же набор двуцветных ручек (важно обратить

внимание детей на то, что из вариантов КС и СК нужно оставить только один, так как порядок цветных стержней по условию задачи не играет роли);

	К	Ж	З	С
К		КЖ	КЗ	КС
Ж	ЖК		ЖЗ	ЖС
З	ЗК	ЗЖ		ЗС
С	СК	СЖ	СЗ	

5) выбор пар клеток таблицы, соответствующих ответу задания.

Вывод в п. б): получилось 6 пар клеток. Учащимся важно осознать, что количество полученных в п. б) пар клеток и будет ответом в пункте в). Для проверки полученного результата целесообразно воспользоваться способом перебора, для чего на доске можно выполнить записи вида:

КЖ ЖЗ ЗС
КЗ ЖС
КС

Ответ: 6 различных видов ручек с двумя стержнями.

Справка для учителя. *В задании находится число сочетаний из четырёх по два:* $C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$.

В ***задании 39*** учащиеся повторяют чтение и запись двузначных чисел. Перед началом работы советуем выяснить, как учащиеся будут записывать двузначные числа в «окошки». Ребята поясняют, что в записи двузначного числа сначала пишем цифру в разряде десятков (первое «окошко»), а потом – цифру из разряда единиц (второе «окошко»). Педагог может дать установку на запись двузначных чисел с той или иной цифрой в разряде десятков из данных четырёх. Далее учащиеся работают самостоятельно, после чего следует коллективное обсуждение. Для проверки полученных результатов целесообразно использовать таблицу на доске, заполнять которую дети будут по очереди. С аналогичной таблицей дети работали в ***задании 36 (2)***.

Советуем записывать числа в таблицу в порядке возрастания, это будет способствовать формированию умения решать комбинаторные задачи способом **системного** перебора.

Разряд единиц / Разряд десятков	1	4	6	9
1	11	14	16	19
4	41	44	46	49
6	61	64	66	69
9	91	94	96	99

Ответ: используя цифры 6, 9, 1, 4, можно записать 16 различных двузначных чисел.

Справка для учителя. *В данной задаче находится число размещений с повторениями из четырёх по два:* $\overline{A}_4^2 = 4^2 = 16$.

Занятие 27. Задания 40–42

Цель. Научиться составлять таблицы для решения комбинаторных задач.

Задание 40. Советуем вынести таблицу на доску. Ребята знакомятся с сюжетом, рассматривают рисунки ручек, после чего учитель обращается к классу с вопросом:

– Верно ли утверждение, что в таблице есть несколько клеток, в которых мы не можем показать выбор двух ручек?

– Давайте перечеркнём такие клетки крест-накрест.

	К	С	З	Ч	Ж
К	X				
С		X			
З					
Ч					
Ж					

Дети по очереди выбегают к доске и зачёркивают клетки таблицы по диагонали, затем приступают к самостоятельному заполнению таблицы с помощью условных обозначений. Советуем вначале договориться, что в записи набора из двух ручек первой будет буква из горизонтального ряда.

	К	С	З	Ч	Ж
К		КС	КЗ	КЧ	КЖ
С	СК		СЗ	СЧ	СЖ
З					
Ч					
Ж					

Для подсчёта вариантов выбора советуем вынести уже заполненную таблицу на доску и пронумеровать одинаковые наборы из двух ручек, подыскивая парам из 1-го ряда соответствующие из других строк таблицы, потом – для пар из 2-го ряда и т. д. Дети выписывают на доске номера пар, в которых одинаковые наборы ручек.

	К	С	З	Ч	Ж
К		1) КС	2) КЗ	3) КЧ	4) КЖ
С	1) СК		5) СЗ	6) СЧ	7) СЖ
З	2) ЗК	5) ЗС		8) ЗЧ	9) ЗЖ
Ч	3) ЧК	6) ЧС	8) ЧЗ		10) ЧЖ
Ж	4) ЖК	7) ЖС	9) ЖЗ	10) ЖЧ	

Заполненная таким образом таблица поможет учащимся проверить ответ (10 вариантов выбора двух ручек).

Нелишне будет повторить и способ системного перебора: либо в форме записи на доске условных обозначений, либо с использованием карточек с буквами К, С, З, Ч, Ж (по 5 карточек для каждой буквы). В последнем случае к доске приглашаем всех желающих, которые берут по две карточки с соответствующими буквами.

КС	СЗ	ЗЧ	ЧЖ
КЗ	СЧ	ЗЖ	
КЧ	СЖ		
КЖ			

Справка для учителя. *В данной задаче находится число сочетаний из пяти по два:* $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$.

Выполнение ***заданий 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47*** основано на заполнении таблиц, в которых каждая клетка содержит один из вариантов ответа.

Справка для учителя. *В* ***заданиях 41–47*** *найти ответы можно, используя правило произведения. Если объект a можно выбрать m способами, а объект b – k способами, то пару (a, b) можно выбрать m · k способами.*

Конечно, не следует сообщать детям правило произведения. Но, пользуясь таблицей, большинство ребят интуитивно приходит к этому обобщению. Помимо таблицы учащиеся могут использовать способ перебора.

Задание 41. Ответ: 15 вариантов выбора экипажа.

Справка для учителя. *Решение основано на правиле произведения 3 · 5 = 15.*

Задание 42. Ответ: 9 вариантов завтрака можно составить.

Справка для учителя. *В основе решения – правило произведения 3 · 3 = 9.*

Занятие 28. Задание 43

Цель. Научиться решать комбинаторные задачи способом установления соответствия и составления таблиц.

В ***задании 43*** учащиеся устанавливают соответствие между элементами двух множеств (платья и воротнички каждой девочки). Можно посоветовать ученикам провести цветные линии от воротничка к платью карандашами того же цвета, что и воротнички. Например, дети выбирают наряд для Тани. Они берут синий карандаш и от синего воротничка проводят

4 линии к платьям девочки, потом так же действуют с жёлтым воротничком и т. д.

Ответ: у Тани 8 вариантов выбора платья с воротничком, у Лены – 9.

Обращаем внимание учителей на то, что заполнение таблицы в этом задании служит средством проверки полученных результатов. Дети самостоятельно вписывают условные обозначения в таблицу и заполняют её.

Справка для учителя. *В основе решения – правило произведения* $2 \cdot 4 = 8$, $3 \cdot 3 = 9$.

Занятие 29. Задания 44, 45

Цель. Научиться использовать составление таблицы для решения комбинаторных задач.

Задание 44. Используя цифры 3, 5, 8, можно записать только 6 двузначных чисел, если в каждом числе цифры не повторяются: 35, 38, 53, 58, 83, 85. Советуем в таблице зачеркнуть клетки с записью чисел, цифры в которых повторяются (33, 55, 88). Эти числа не соответствуют требованию задания.

Справка для учителя. *Ответ можно проверить по правилу произведения* $3 \cdot 2 = 6$. *В данном случае можно говорить о размещении без повторения, так как для составления двузначных чисел используются элементы одного множества.*

Задание 45 аналогично ***заданию 43***. Продолжается работа с комбинаторными задачами, решение которых основано на правиле произведения.

Ответ: 12 различных наборов из ручки и блокнота сможет составить Миша.

Справка для учителя. *В задании ответ находится по правилу произведения* $4 \cdot 3 = 12$.

Занятие 30. Задания 46, 47

Цель. Научиться использовать способы установления соответствия и составления таблиц для решения комбинаторных задач.

Задание 46 по способу выполнения аналогично ***заданию 42***. Дети устанавливают соответствие между элементами двух множеств, соединяя линией каждую кофточку с каждой юбкой, и делают вывод: получилось 6 комплектов «кофточка – юбка».

Однако Маша не сможет в течение семи дней надевать ежедневно разные комплекты. Проверка осуществляется при заполнении таблицы, в которой школьники осуществляют системный перебор. Перед заполнением таблицы советуем договориться, как дети будут заполнять таблицу: по горизонтали или по вертикали, то есть какой предмет (кофточка или юбка) в записи комплекта в клетке таблицы будет указан первым.

Справка для учителя. *В задании ответ находится по правилу произведения* $2 \cdot 3 = 6$.

Задание 47. См. рекомендации к ***заданиям 43, 46***. У Миши получится составить 3 костюма, у Маши – 4 костюма. Миша ошибается, а Маша права.

Справка для учителя. *В задании ответ находится по правилу произведения* $3 \cdot 1 = 3$, $2 \cdot 2 = 4$.

Занятие 31. Задания 48, 49

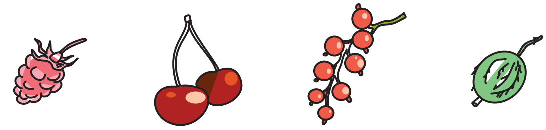
Цель. Научиться решать комбинаторные задачи, используя способ соответствия и составления таблиц.

Задание 48. Организация деятельности по работе с таблицей описана в рекомендациях к ***заданию 40***. Если брать по 2 вида ягод, можно приготовить 6 видов варенья ассорти. Советуем использовать системный перебор для проверки полученных результатов.

МВ	ВС	СК
МС	ВК	
МК		

Одна полоска для записи возможных видов варенья – «ловушка».

Для проверки выполнения задания г) можно предложить ребятам подписать у каждого варианта, какая ягода не вошла в ассорти. Все варианты должны быть различными.



(М) (В) (С) (К)

М	В	С	К

М	В	К	С

М	С	К	В

В	С	К	М

Справка для учителя. *Таким образом, мы ещё раз неявно повторяем свойства числа сочетаний из n по k:* $C_n^k = C_n^{n-k}$. *В нашем случае* $C_4^3 = C_4^{4-3} = C_4^1$.

Решение основано на поиске числа сочетаний из четырёх по два: $C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 6$ *– и числа сочетаний из четырёх по три:* $C_4^3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$.

Задание 49. Ребята самостоятельно обозначают шапочки цифрами (1, 2, 3), а шарфики – буквами (А, Б, В) и вписывают в таблицу различные комплекты.

Ответ: 9 комплектов из шапочки и шарфа может составить Таня.

Справка для учителя. *В задании ответ можно проверить, пользуясь правилом произведения 3 · 3 = 9.*

Занятие 32. Задание 50

Цель. Учиться рассуждать в процессе решения комбинаторных задач.

В ***задании 50*** представлена последовательность действий, ориентируясь на которую ученик сможет дать ответ на вопрос задачи. Если в первую лунку посадили берёзку, то во вторую лунку дедушка и внук могут посадить или клён, или дуб. В этом случае возможны 2 варианта посадки трёх деревьев: БКД или БДК. Если же в первую лунку посадили клён, также возможны 2 варианта посадки этих трёх деревьев: КБД или КДБ.

Ответ: возможны 6 вариантов посадки трёх деревьев.

Справка для учителя. *В задании находится число перестановок из трёх элементов:* $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Занятие 33. Задания 51, 52

Цель. Самостоятельная работа. Проверить умение решать комбинаторные задачи, используя способы установления соответствия, проведения системного перебора и составления таблицы.

Задание 51. Ребята анализируют рисунки и обсуждают варианты составления пар. Допустим, первым в пару ставим мальчика, тогда, например, Олег может быть участником пяти пар (по условию в танцевальном кружке 5 девочек). Аналогично можно рассуждать для всех других мальчиков. Вывод: можно составить 25 различных танцевальных пар. Если же первой в пару мы ставим девочку, то каждая из них также может быть участницей пяти танцевальных пар.

Ответ: 25 танцевальных пар можно составить.

Заполнять таблицу будем по горизонтали, то есть первой в паре будет имя девочки. В итоге таблица имеет вид:

М / Д	О	В	С	А	И
Ж	ЖО	ЖВ	ЖС	ЖА	ЖИ
М	МО	МВ	МС	МА	МИ
К	КО	КВ	КС	КА	КИ
Ю	ЮО	ЮВ	ЮС	ЮА	ЮИ
Д	ДО	ДВ	ДС	ДА	ДИ

Справка для учителя. *В задании ответ находится по правилу произведения* $5 \cdot 5 = 25$.

Формулировка ***задания 52*** учащимся знакома, аналогичные задания они уже выполняли. Начиная работу с заданием, учитель предлагает ученикам подчеркнуть цифру, которая не может стоять в разряде десятков. Затем ребята самостоятельно заполняют таблицу (в таблице – «ловушка», в ней больше строк и столбцов), после чего следует выяснить, сколько строк и столбцов в таблице заполнено.

Ответ: получится 12 различных двузначных чисел.

При составлении таблицы важно записать и десятки, и единицы в порядке возрастания, тогда и двузначные числа будут записаны в порядке возрастания. Такая работа учит ребят системному перебору. Если не ориентироваться на системный перебор, то вариантов заполнения таблицы огромное количество.

Например, вариантов записи числа единиц $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ (число перестановок из четырёх элементов). Вариантов записи числа десятков $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ (число перестановок из трёх элементов). По правилу произведения получаем, что всего вариантов заполнения таблицы $24 \cdot 6 = 144$.

Если же мы записываем числа в порядке возрастания, то это можно сделать единственным способом! К овладению таким способом и следует стремиться.

После заполнения таблица будет выглядеть так:

Единицы / Десятки	0	2	5	7
2	20	22	25	27
5	50	52	55	57
7	70	72	75	77

Как показывает практика, ответы на вопросы пунктов б) – в) – г) не вызывают затруднений у второклассников: б) 20, 22, 25, 27, 50, 52, 55, 57, 70, 72, 75, 77; в) 9; г) 20, 50, 70. К системному перебору можно отнести и запись двузначных чисел в порядке убывания, так как отношения «больше», «меньше» однозначно упорядочивают числовые множества.

Справка для учителя. *В задании ответ находится по правилу произведения* $4 \cdot 3 = 12$.

3 класс

Примерное планирование занятий с использованием тетради «Учимся решать комбинаторные задачи» (авторы Н. Б. Истомина, З. Б. Редько, Е. П. Виноградова)

№ занятия	Цель занятия	№ задания
1	Вводное занятие. Проверить умения находить количество возможных вариантов обозначения отрезков, заполнять таблицу, анализировать её и делать выводы.	1
2	Проверить умения читать текст задачи, действовать по плану, выполнять системный перебор.	2
3	Проверить умения читать текст задачи, выполнять перебор (стихийный или системный), заполнять таблицу, анализировать её и делать выводы.	3
4	**Самостоятельная работа.** Проверить умение выполнять системный перебор.	4
5	Познакомить учащихся с *деревом возможных вариантов* и его элементами, со способами построения, заполнения и чтения.	5
6	Учиться рассуждать, выполнять системный перебор, заполнять и комментировать *дерево возможных вариантов*.	6
7	Совершенствовать умения устанавливать соответствие, заполнять таблицу и *дерево возможных вариантов* на предметных моделях.	7
8	Учиться заполнять и комментировать *дерево возможных вариантов* на предметных моделях, используя числовой материал.	8
9	Учиться устанавливать соответствие на предметных моделях, заполнять и анализировать *дерево возможных вариантов*.	9

10	Учиться заполнять *дерево возможных вариантов* по частям и делать вывод, объединяя части в целое.	10
11	Проверить умения выполнять системный перебор, использовать таблицу и *дерево возможных вариантов* для проверки полученных результатов.	11
12	Учиться рассуждать, заполнять *дерево возможных вариантов* в соответствии с правилами игры в волейбол, строить различные варианты моделей приёма и передачи мяча.	12
13	Учиться находить все возможные варианты составления расписания уроков, заполнять схему-*дерево возможных вариантов* по частям и делать вывод, объединяя части в целое.	13
14	**Самостоятельная работа.** Проверить умение выполнять комбинаторное задание, используя различные способы.	14
15	Учиться рассуждать и заполнять *дерево возможных вариантов*.	15
16	Учиться применять способы решения комбинаторных задач при построении отрезков и применении правил порядка выполнения действий.	16
17	Учиться использовать комбинаторные умения при изучении правил порядка выполнения действий.	17
18	Учиться заполнять *дерево возможных вариантов* по частям и делать вывод, объединяя части в целое.	18
19	Учиться применять способы решения комбинаторных задач в заданиях на правила порядка выполнения действий в числовых выражениях.	19, 20
20	Учиться заполнять *дерево возможных вариантов* по частям и делать вывод, объединяя части в целое (на числовом материале).	21
21	Учиться заполнять и строить *дерево возможных вариантов*.	22
22	Проверить умения заполнять и анализировать *дерево возможных вариантов*.	23
23	Учиться заполнять *дерево возможных вариантов* по частям и делать вывод, объединяя части в целое (на числовом материале).	24

24	**Самостоятельная работа.** Проверить умения рассуждать, заполнять и комментировать *дерево возможных вариантов* (на числовом материале).	25, 26
25	**Самостоятельная работа.** Проверить умения рассуждать, заполнять и комментировать *дерево возможных вариантов* (на числовом материале).	27

Ориентируясь на данное планирование, учитель может составить свой план, увеличив или уменьшив количество часов на выполнение заданий из тетради «Учимся решать комбинаторные задачи» (3 класс), а также подобрать для занятий с учащимися другие комбинаторные задачи.

Методические рекомендации к занятиям. 3 класс

В 3 классе дети познакомятся со схемой-*деревом возможных вариантов*, будут учиться анализировать и заполнять схему в соответствии с требованием задания, читать её, извлекать информацию и строить схему, ориентируясь на условие задания.

Занятие 1 (вводное). Задание 1

Цель. Проверить умения находить количество возможных вариантов обозначения отрезков, заполнять таблицу, анализировать её и делать выводы.

В начале занятия советуем познакомиться с тетрадью, полистать её, прочитать обращение авторов на с. 3 и обратить внимание ребят на то, что на первых занятиях они будут повторять те способы решения комбинаторных задач, с которыми познакомились в 1–2 классах.

Задание 1. Пользуясь способом перебора, дети самостоятельно обозначают данные на рисунках отрезки буквами (п. 2). Отметим, что отрезков на рисунке больше (их 8), чем можно обозначить двумя буквами. Важно, чтобы учащиеся обозначали данные отрезки с осознанием того, что AB и BA – это название одного и того же отрезка.

Ответ: 6 различных вариантов (AB, AC, AD, BC, BD, CD). 2 отрезка в п. 2 остаются необозначенными.

Затем третьеклассники приступают к заполнению таблицы, ориентируясь на план в пунктах 3 и 4. Советуем дать учащимся время для выполнения пункта 3, а потом выяснить коллективно, какие клетки таблицы будут зачёркнуты. Это клетки, в которых будут записаны обозначения вида AA, BB и т. д. Эти записи противоречат требованиям к обозначению отрезков в геометрии.

В пункте 4 дети анализируют уже заполненную таблицу и выбирают пары клеток, каждую из которых нужно закрасить одним цветом (АВ и ВА, АС и СА и т. д.). Учитель может обратить внимание класса на то, что каждая пара клеток располагается в таблице по обе стороны от зачёркнутых клеток (от диагонали). Ответ на вопрос «Сколько пар клеток ты закрасил?» является ответом на вопрос задачи.

Ответ: 6 отрезков.

Справка для учителя. *В задании находится число сочетаний из четырёх по два:* $C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$.

Занятие 2. Задание 2

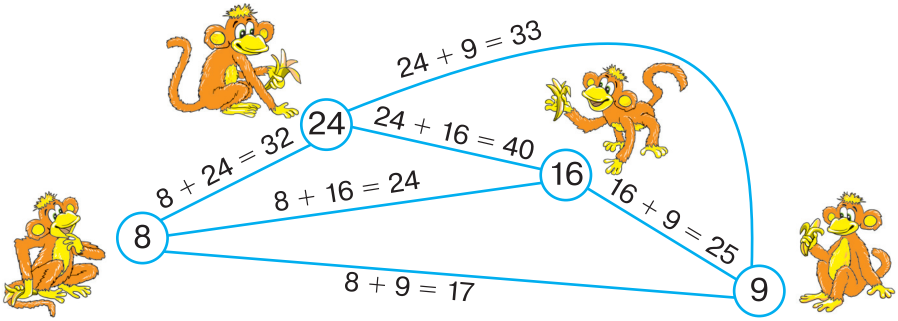
Цель. Проверить умения читать текст задачи, действовать по плану, выполнять системный перебор.

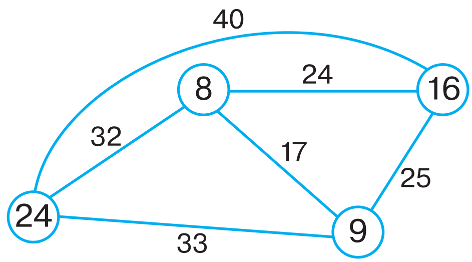
Задание 2. Ответ на вопрос данной задачи неоднозначен, так как в нём не указано, о каких двух обезьянах идёт речь. Пользуясь предложенным планом решения задачи, учащиеся самостоятельно выполняют каждый его пункт. При выполнении п. 3 ученики пользуются системным перебором и определяют возможные варианты выбора двух обезьян.

В п. 3 даны лишние строчки для записи вариантов выбора, заполнить можно только 6 из них. Проверку количества вариантов выбора двух обезьян целесообразно осуществить после того, как ученики выполнят п. 4. Ответы пунктов 3 и 4 совпадают: сколько вариантов выбора пары обезьян существует (их 6), столько будет и ответов на вопрос задачи.

В п. 5 по усмотрению учителя можно ограничиться записью результата или записать арифметическое действие, с помощью которого ученики нашли этот результат. Ориентируясь на системный перебор, выполненный в п. 3, учащиеся выполняют вычисления в п. 5. Учитель выписывает полученные результаты на доске в произвольном порядке и обращается к классу с предложением пояснить записи (назвать пару обезьян, для которой получен тот или иной результат).

Для проверки полученного результата рекомендуем составить модели задачи.





Главное, в модели нужно указать число бананов, которое съела каждая обезьяна, и соединить их попарно. Затем ребятам подпишут над линиями, сколько бананов съели две обезьяны вместе.

Такая работа с моделью наглядно поможет ребятам увидеть все варианты и результаты.

Если большинство учеников самостоятельно справились с п. 1–4, то в п. 5 можно ограничиться записью шести ответов: 32 (первая и вторая), 24 (первая и третья), 17 (первая и четвёртая); 40 (вторая и третья), 33 (вторая и четвёртая); 25 (третья и четвёртая).

Справка для учителя. *Количество выбора пар обезьян можно найти, используя формулу числа сочетаний из четырёх по два:* $C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 6.$

Занятие 3. Задание 3

Цель. Проверить умения читать текст задачи, выполнять перебор (стихийный или системный), заполнять таблицу, анализировать её и делать выводы.

Задание 3. Здесь также надо выбрать 2 книги из четырёх, порядок выбора несущественен. В пункте 2 – «ловушка», нужно заполнить только 6 пар клеток. Организация работы с таблицей аналогична той, которую дети уже выполняли в ***задании 1***. Советуем не торопить ребят, а дать им время на внимательное прочтение инструкции в пунктах 3 и 4, осмысление прочитанного и последующее выполнение.

Возможно «оживить» ситуацию, подготовив книги указанных авторов и пригласив к доске несколько девочек, каждая из которых будет действовать в соответствии с условием задания.

Ответ: 6 вариантов выбора двух книг.

Справка для учителя. *В задании находится число сочетаний из четырёх по 2:* $C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 6.$

Занятие 4. Задание 4

Цель. Самостоятельная работа. Проверить умение выполнять системный перебор.

Задание 4 рекомендуем предложить для обучающей самостоятельной работы с последующим коллективным обсуждением. В отличие от ***задания 2*** нужно выбрать двух ребят из шести. В первом и втором столбцах п. 2 дано условное обозначение имени одного из победителей конкурса чтецов, что ориентирует учащихся на выбор имени второго. Так, например, Маша может быть в паре с каждым из пяти других участников конкурса. Для Риты таких пар тоже будет 5, но в паре с Машей Рита уже была указана, значит, нужно записать новые варианты: она может быть награждена или в паре с Верой, или с Серёжей, или с Надей, или с Петей. Далее возможно составить ещё 3 новые пары, в каждой из которых будет Вера и т. д.

Ответ: 15 вариантов выбора двух награждённых.

Для проверки результатов советуем записать на доске имена всех участников конкурса и линиями разного цвета соединить возможные варианты. Например, имя Маша с другими именами дети могут соединять линией, скажем, красного цвета, имя Рита – линией зелёного цвета и т. д. После того как все линии будут проведены, дети подсчитывают их число. Порядок расположения детей в парах не важен.

Справка для учителя. *В задании находится число сочетаний из шести по два:* $C_6^2 = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15.$

Занятие 5. Задание 5

Цель. Познакомить учащихся с деревом возможных вариантов и его элементами, со способами его построения, заполнения и чтения.

В ***задании 5*** дети знакомятся с новым способом решения комбинаторных задач, в котором для определения количества возможных вариантов необходимо построить схему-*дерево возможных вариантов*. Она является универсальным средством решения самых разных комбинаторных задач. Название её не случайно: внешне схема напоминает дерево – в ней есть и корень, и ветви (веточки), отсюда и название – *дерево возможных вариантов*. Корень дерева можно изображать любым знаком (в тетради это треугольник), ветви (веточки) дерева отображают все возможные варианты решения комбинаторной задачи. При правильном построении дерева возможных вариантов ни одно из решений не будет потеряно.

Сюжет ***задачи 5*** достаточно прост: мальчик навещает друзей. Речь идёт о выполнении им трёх визитов в разной последовательности. Решение способом системного перебора большинство учащихся уже могут выполнить самостоятельно. После записи ответа и его обсуждения ребята читают текст в рамочке, а педагог знакомит их с новым способом действия – построением схемы, которую называют *деревом возможных вариантов*.

Учитель поясняет, что схема напоминает дерево, где знак ▲ обозначает *корень дерева*. От него отходят веточки, на которых показаны решения.

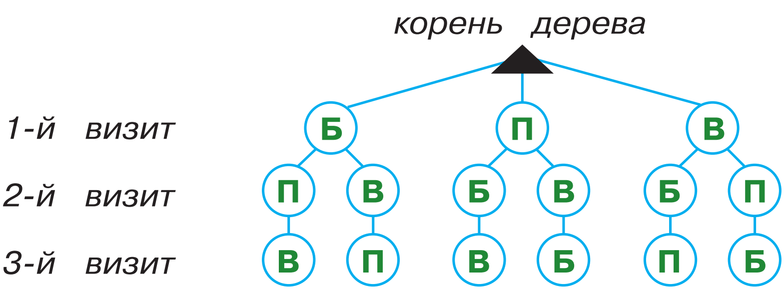
Затем учащиеся соотносят результаты системного перебора и записи в схеме 1 (из корня дерева «растут» решения-веточки).

Далее ребята читают текст в рамочке на с. 9 и заполняют схему 2, которая по сравнению со схемой 1 выполнена иначе: корень наверху. Таким образом, дети знакомятся с возможностью различного расположения дерева возможных вариантов.

Важно иметь в виду, что дерево возможных вариантов можно заполнять по-разному, но вариативность заполнения никак не влияет ни на процесс решения, ни на его на результат. Однако это важно учитывать при проверке работ учащихся, так как самостоятельно построенные ими схемы в одном и том же задании могут отличаться порядком выбора тех или иных элементов дерева возможных вариантов. Каждая из приведённых в данном пособии заполненных схем является лишь одним из возможных вариантов выполнения задания или заполнения схемы и не исключает других.

Один из возможных вариантов заполнения схемы 2.

Схема 2



Желательно дать классу возможность самостоятельно заполнить схему 2, подсчитать веточки дерева, записать ответ в «окошко» после схемы и только потом обсудить полученный результат.

Ответ: 6 вариантов возможного порядка визитов Коли.

В п. 4 формируется умение читать схему: ребята выбирают веточки дерева, соответствующие тому или иному варианту выполнения визитов. Можно продолжить работу со схемой, обводя цветным карандашом другие варианты визитов Коли. Например, Боря – Вова – Петя или Петя – Боря – Вова.

Следует обратить внимание учащихся на то, что они получают одинаковое количество вариантов порядка визитов Коли, пользуясь различными способами (перебор, *дерево возможных вариантов*).

Справка для учителя. *В задании находится число перестановок из трёх элементов:* $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Занятие 6. Задание 6

Цель. Учиться рассуждать, выполнять системный перебор, заполнять и комментировать дерево возможных вариантов.

Начиная работу с ***заданием 6***, советуем выяснить, как дети понимают слово «чередовались». Можно на занятии поработать со словарём (чередоваться – последовательно сменять одно другим или по очереди заменять один другого).

В п. 2, ориентируясь на текст задачи, дети вписывают пропущенные слова и составляют высказывания в форме связи простых суждений, затем выполняют системный перебор, соблюдая требование задания (девочки и мальчики должны чередоваться).

В п. 3 ученики осуществляют выбор ребят для расположения их на скамейке, заполняя «окошки» условными обозначениями, и подсчитывают количество возможных вариантов расположения. Их 8.

В п. 4 важно обсудить с учащимися последовательность построения дерева возможных вариантов. Например, первой на скамейку садится Настя (Н). От кружка с буквой Н вниз идут две линии: рядом с Настей может сидеть или Миша (М), или Серёжа (С). Рядом с Мишей может сидеть только Таня (Т), так как по условию девочка и мальчик должны чередоваться. Рядом с Таней в этом случае может сесть только Серёжа. Аналогично следует рассуждать для той части дерева возможных вариантов, когда первым на скамейку садится М (Миша), Т (Таня), С (Серёжа).

Рекомендуем обратить внимание третьеклассников на то, что порядок размещения детей на скамейке показан на веточках дерева, а заполнение схемы, то есть выбор первого сидящего на скамейке, можно начинать с любого ребёнка. Чтобы учитель мог проверить, насколько учащиеся осознают способ действия, советуем предложить классу п. 5 для самостоятельной работы.

Справка для учителя. *В задании ответ находится по правилу произведения $4 \cdot 2 = 8$, где 4 – количество вариантов выбора первого человека для размещения на лавочке, а 2 – количество вариантов выбора второго человека. Так как это должен быть человек другого пола, то остаётся два варианта, а оставшиеся дети рассаживаются однозначно в соответствии с условием.*

Занятие 7. Задание 7

Цель. Совершенствовать умения устанавливать соответствие, заполнять таблицу и дерево возможных вариантов на предметных моделях.

В основе выполнения ***задания 7*** правило произведения, которое третьеклассникам не сообщается. Тем не менее полезно обсудить предложенную ситуацию с точки зрения данного правила. А именно: берет можно выбрать четырьмя способами, так как беретов 4; рубашку – тремя способами, так как их 3. Выбор пары «берет – рубашка» можно осуществить двенадцатью способами ($3 \cdot 4$; $4 \cdot 3$). Связь с умножением осознаётся детьми при установлении соответствия, при составлении таблицы и при заполнении дерева возможных вариантов.

При выполнении п. 2 ребята будут устанавливать соответствие между парой предметов, ориентируясь на требование задания. Педагог предлагает ребятам взять карандаш красного цвета и соединить линией красный берет с каждой рубашкой (получим 3 комплекта), потом нужно взять чёрный карандаш и провести им линии от чёрного берета к каждой рубашке (3 линии – это 3 комплекта) и т. д.

Затем ребята вписывают в «окошко» ответ, проверять который будут при заполнении таблицы.

В п. 3 советуем педагогу ориентировать учащихся заполнять таблицу либо по горизонтали (сначала выбираем рубашку, а потом берет; таблица 1), либо по вертикали (сначала берет, потом рубашка; таблица 2).

Таблица 1

Берет / Рубашка	К	Ч	Ж	З
1	1 К	1Ч	1 Ж	1 З
2	2 К	2Ч	2 Ж	2 З
3	3 К	3Ч	3 Ж	3 З

Таблица 2

Берет / Рубашка	К	Ч	Ж	З
1	К 1	Ч 1	Ж 1	З 1
2	К 2	Ч 2	Ж 2	З 2
3	К 3	Ч 3	Ж 3	З 3

После заполнения таблиц ребята записывают ответ на вопрос и приступают к п. 4, в котором они самостоятельно заполняют схемы 1 и 2, а затем обсуждают результат. В первой схеме дети сначала выбирают берет, а затем рубашку, в схеме 2 – сначала рубашку, а потом берет. Желательно соотнести заполнение таблицы со схемами.

В п. 5 третьеклассники читают схему, выбирая веточки дерева, соответствующие указанным комплектам.

В п. 6 учащиеся записывают ответ на вопрос задачи, используя полученные результаты.

Ответ: не сможет.

Справка для учителя. *В задании ответ находится по правилу произведения* $4 \cdot 3 = 12$.

Занятие 8. Задание 8

Цель. Учиться заполнять и комментировать дерево возможных вариантов на предметных моделях, используя числовой материал.

В ***задании 8*** предложена последовательность действий, выполнение которых позволит детям самостоятельно ответить на вопрос задачи.

В п. 2 учащиеся заполняют часть схемы-*дерева возможных вариантов* для трёхзначных чисел, в которых: а) 7 сотен; б) 2 сотни; в) 9 сотен, получая в каждом случае по 9 чисел.

В п. 3 ребята делают вывод и записывают ответ: 27 чисел.

Пункты 4, 5, 6 дети выполняют самостоятельно. В каждом из них совершенствуются умения читать схему, выделяя ту или иную информацию; записывать трёхзначные числа, соответствующие требованиям задания.

Справка для учителя. *В задании находится число размещений с повторением из трёх элементов по три, то есть* $\overline{A}_3^3 = 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

Занятие 9. Задание 9

Цель. Учиться устанавливать соответствие на предметных моделях, заполнять и анализировать дерево возможных вариантов.

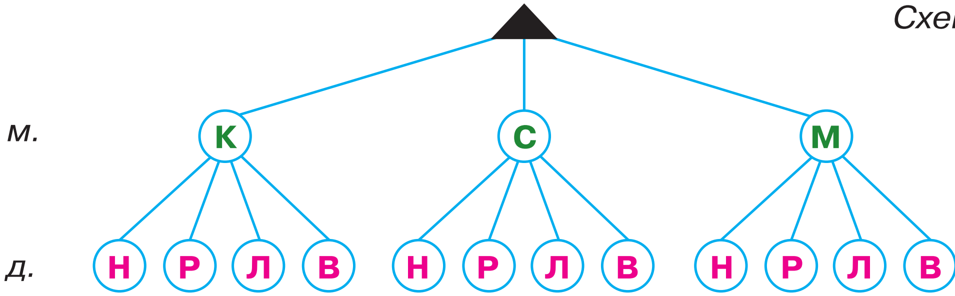
Задание 9. Аналогично ***заданию 7*** (на основе правила произведения). Из трёх мальчиков ведущего для концерта можно выбрать тремя способами, из четырёх девочек ведущую можно выбрать четырьмя способами. Двух ведущих (мальчика и девочку) можно выбрать двенадцатью способами ($4 \cdot 3 = 12$).

В п. 2 дети устанавливают соответствие между парами возможных ведущих, подсчитывают варианты выбора пары ведущих и вписывают ответ в «окошко».

Таким образом, возможны 12 вариантов выбора пары ведущих. Проверка полученного результата осуществляется при заполнении каждого дерева возможных вариантов. На схеме 1 сначала в пару ведущих выбирается мальчик, а затем к нему выбирается девочка.

Покажем один из возможных вариантов заполнения схемы 1.

Схема 1



На схеме 2 сначала первой в пару ведущих выбирается девочка, а вторым – мальчик.

В п. 4 и 5 третьеклассники читают схемы, выделяя цветным карандашом один из вариантов выполнения задания.

Ответ: 12 вариантов выбора пары ведущих.

Справка для учителя. *В задании ответ находится по правилу произведения 4 · 3 = 12.*

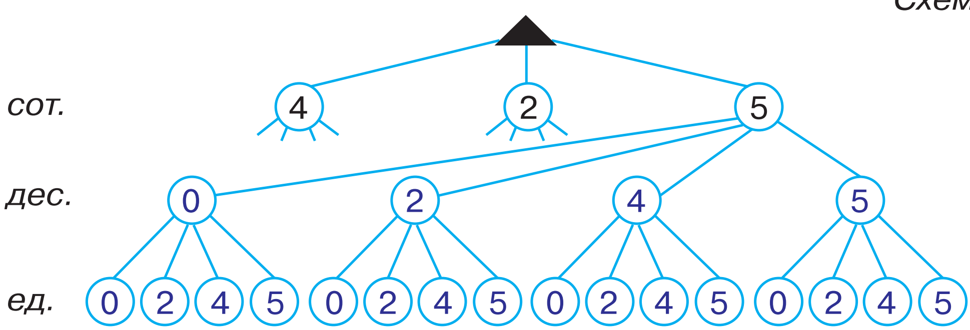
Занятие 10. Задание 10

Цель. Учиться заполнять дерево возможных вариантов по частям и делать вывод, объединяя части в целое.

Особенность ***задания 10*** заключается в том, что запись многозначного числа не может начинаться с цифры 0, поэтому в разряде сотен могут быть записаны только цифры 4, 2, 5. В тетради предложено заполнить не всё дерево возможных вариантов, а только его часть.

Приведём один из возможных вариантов заполнения схемы 3.

Схема 3



Аналогичные варианты получатся при заполнении схем 1 и 2.

Анализ каждой части схемы позволит учащимся записать ответ на вопрос задачи в п. 3: 48 трёхзначных чисел. Далее ребята самостоятельно выполняют требования пунктов 4, 5, 6, анализируя каждую из схем и выделяя необходимую для ответа информацию.

Справка для учителя. *В задании ответ находится по правилу произведения $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$, где 3, 4 и 4 – количество вариантов выбора первой, второй и третьей цифр числа.*

Занятие 11. Задание 11

Цель. Проверить умения выполнять системный перебор, использовать таблицу и дерево возможных вариантов для проверки полученных результатов.

В ***задании 11*** девочке нужно выбрать 2 дня тренировок из пяти подходящих. Отметим, что в данном случае порядок выбора дней не играет роли. Аналогичные задания уже встречались в тетради. В основе выполнения ***задания 11*** лежит деятельность учащихся, которая связана с умением использовать все уже известные способы решения комбинаторных задач.

В п. 2 третьеклассники самостоятельно вписывают ответ в «окошко», пользуясь способом перебора. На странице тетради предложена заготовка для записи, которая ориентирует ребят на системный перебор.

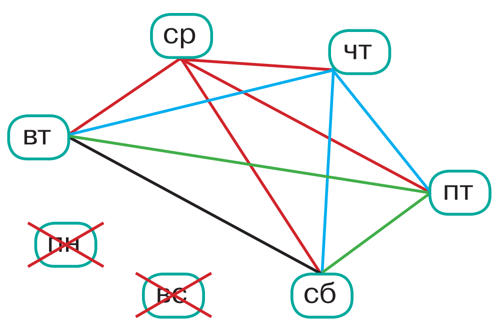
Ответ: возможны 10 вариантов выбора двух дней для тренировок.

В п. 3 дети проверяют полученный результат, заполняя условными обозначениями таблицу. Ориентируясь на количество столбцов таблицы (их 8), некоторые ученики могут вписать 7 дней недели по порядку. В этом случае педагог советует им ещё раз обратиться к тексту задачи, из которого следует, что тренировки проводятся 5 раз в неделю.

	вт	ср	чт	пт	сб
вт		вт – ср	вт – чт	вт – пт	вт – сб
ср	ср – вт		ср – чт	ср – пт	ср – сб
чт	чт – вт	чт – ср		чт – пт	чт – сб
пт	пт – вт	пт – ср	пт – чт		пт – сб
сб	сб – вт	сб – ср	сб – чт	сб – пт	

Прежде чем записать ответ в «окошко», третьеклассники могут закрасить одним цветом несколько пар клеток, в которых записаны одинаковые два дня для тренировок (например, вт – сб и сб – вт и т. д.), используя для этой цели цветные карандаши. Это поможет ребятам понять, что закрашенная одним цветом пара клеток – это один выбор.

В п. 4 для проверки полученного результата предлагается нарисовать схему. Начать можно с зачёркивания тех дней недели, которые не могут быть выбраны для тренировок по условию (пн и вс), а затем соединять линиями названия тех дней недели, которые Маша может выбрать для тренировок. Желательно использовать 4–5 цветных карандашей, чтобы легче было подсчитать ответ. После завершения работы с п. 4 советуем вынести на доску рисунок вида:



Советуем обратить внимание третьеклассников на то, что при выполнении задания любым способом в результате получаем один и тот же ответ: 10 вариантов выбора двух дней для тренировок.

Справка для учителя. *В задании находится число сочетаний из пяти по два:* $C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$

Занятие 12. Задание 12

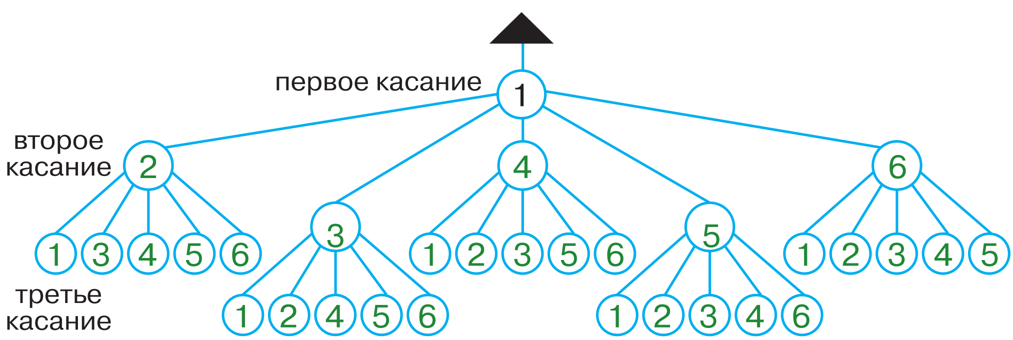
Цель. Учиться рассуждать, заполнять дерево возможных вариантов в соответствии с правилами игры в волейбол, строить различные варианты моделей приёма и передачи мяча.

Задание 12. Вполне возможно, что третьеклассники не знакомы с правилами игры в волейбол (нужно разъяснить их детям, а также пояснить значение слова «пас» – передача мяча). Затем советуем обсудить, как ребята понимают словосочетание «не более трёх человек» (это и 1, и 2, и 3 человека, но больше трёх быть не может). Также возможен вариант «ни одного», который мы не будем рассматривать, так как в тексте ***задания 12*** речь идёт о том, что мяч нужно отбить на другую сторону площадки.

Далее желательно рассмотреть различные игровые ситуации, когда мяч может быть переведён на сторону противника по-разному: в одно, в два и в три касания. Причём в случае трёх касаний могут быть задействованы как 3, так и 2 игрока.

Все эти варианты можно найти на схеме в пункте 2.

Приведём один из возможных вариантов её заполнения.



Заполняя схему, учащиеся замечают, что игрок 1 принимает мяч (первое касание), передаёт его одному из игроков на площадке (второе касание), а тот в свою очередь передаёт мяч ещё кому-то из находящихся на площадке, в том числе и игроку 1 (третье касание), после чего мяч переводится на сторону противника.

Таким образом, если мяч отбивается в три касания, получаем 25 вариантов игровой ситуации.

Далее педагог предлагает классу выяснить, сколько возможно вариантов игровой ситуации, когда мяч переводится на сторону противника в два касания (1 – 2, 1 – 3, 1 – 4, 1 – 5, 1 – 6; всего получаем 5 вариантов). Эти варианты тоже видны на схеме в строке «второе касание».

А сколько есть вариантов отбить мяч в одно касание? (Один.)

Затем подведём итог, сколько всего возможно вариантов игровой ситуации, если мяч принял первый игрок? (В одно касание – 1 вариант, в два касания – 5 вариантов, в три касания – 25 вариантов. Всего – 31 вариант.)

В п. 3 дети анализируют схему и выделяют на ней заданные варианты приёма и передачи мяча.

В п. 4 по аналогии с п. 2 ребята делают выводы относительно количества возможных вариантов игровой ситуации, когда первым мяч принимает любой из других пяти игроков на площадке: а) 31; б) 31; в) 31; г) 31; д) 31.

В п. 5 учащиеся обобщают полученные результаты и дают ответ: 6 · 31 = 186 вариантов.

Занятие 13. Задание 13

Цель. Учиться находить все возможные варианты составления расписания уроков, заполнять дерево возможных вариантов по частям и делать вывод, объединяя части в целое.

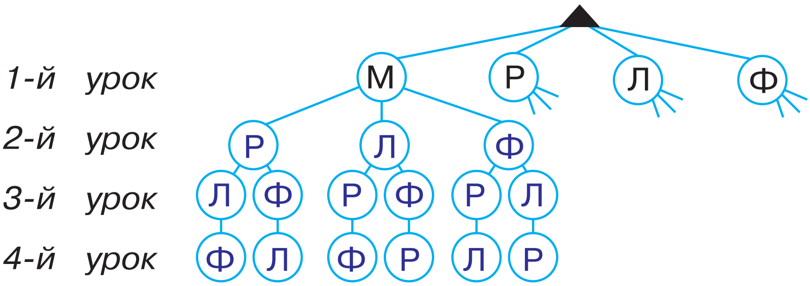
Задание 13 аналогично ***заданию 8***, только здесь речь идёт о перестановках четырёх уроков. Дети самостоятельно заполняют дерево возможных вариантов по частям.

Один из возможных вариантов заполнения схем приведён на с. 63.

Анализ заполненных схем помогает третьеклассникам записать ответ на вопрос задачи: ***24 варианта расписания уроков*** можно составить на среду в 3 классе.

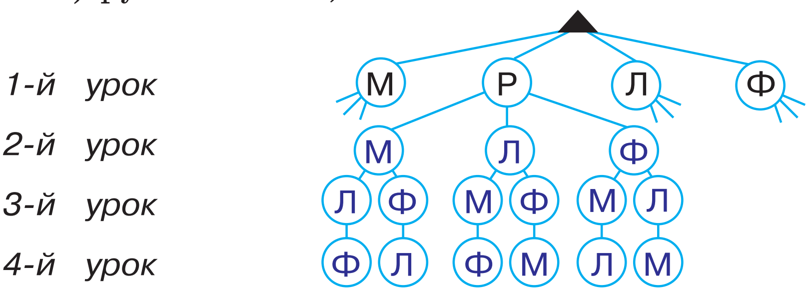
а) Математика;

Схема 1



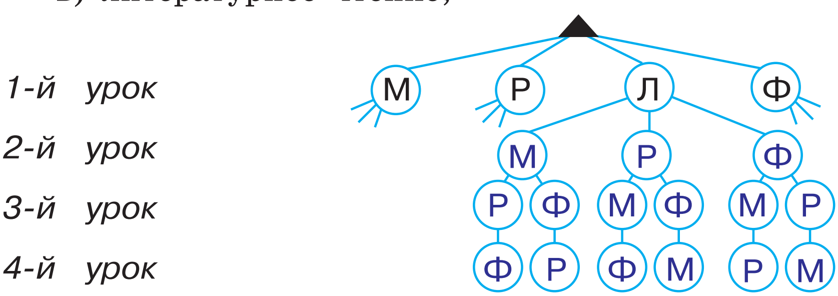
б) русский язык;

Схема 2



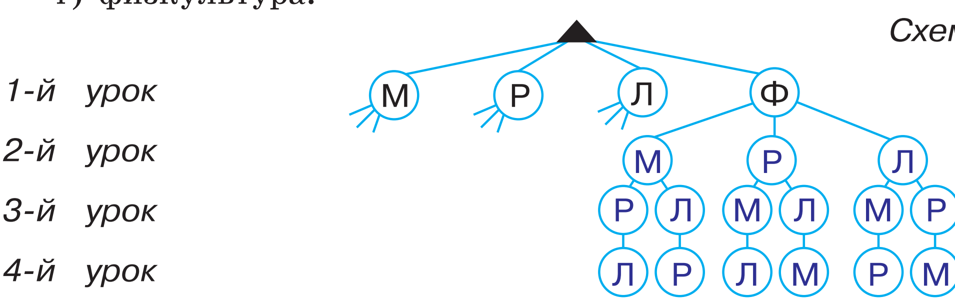
в) литературное чтение;

Схема 3



г) физкультура.

Схема 4



В п. 4 и п. 5 дети работают со схемами, выделяя в каждой веточку дерева, на которой показан один из вариантов расписания уроков.

В п. 6 учащиеся выполняют системный перебор, выписывая все варианты расписания.

В п. 7 интересен личностный аспект вопроса: каждый ученик может выбрать свой вариант расписания, который понравился только ему.

Справка для учителя. *В задании находится число перестановок из четырёх элементов:* $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Занятие 14. Задание 14. Самостоятельная работа

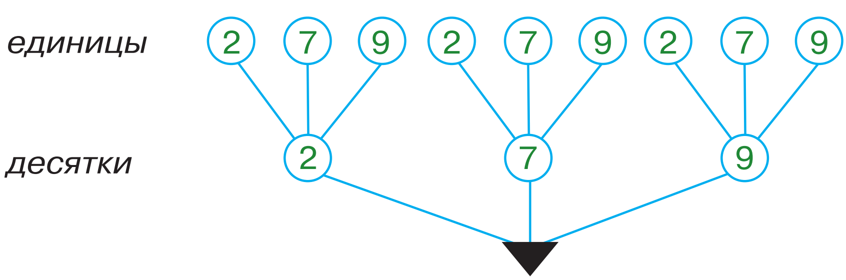
Цель. Проверить умение выполнять комбинаторное задание различными способами.

Задание 14 целесообразно предложить для самостоятельной работы, в которой проверяется умение выполнять комбинаторное задание на числовом материале, используя различные способы: системный перебор и построение дерева возможных вариантов.

Ответ: 9 двузначных чисел.

Для перебора возможных вариантов имеется подсказка: в каждом числе уже записана цифра в разряде десятков. Корень дерева расположен внизу. Так как для записи двузначных чисел можно использовать 3 цифры, от корня идут 3 веточки к разрядным десяткам, далее от каждой цифры в разряде десятков идут 3 веточки к разрядным единицам.

Один из возможных вариантов выполнения задания.



Справка для учителя. *В данной задаче находится число размещений с повторениями из трёх по два:* $\overline{A}_3^2 = 3^2 = 9$.

Занятие 15. Задание 15

Цель. Учиться рассуждать и заполнять дерево возможных вариантов.

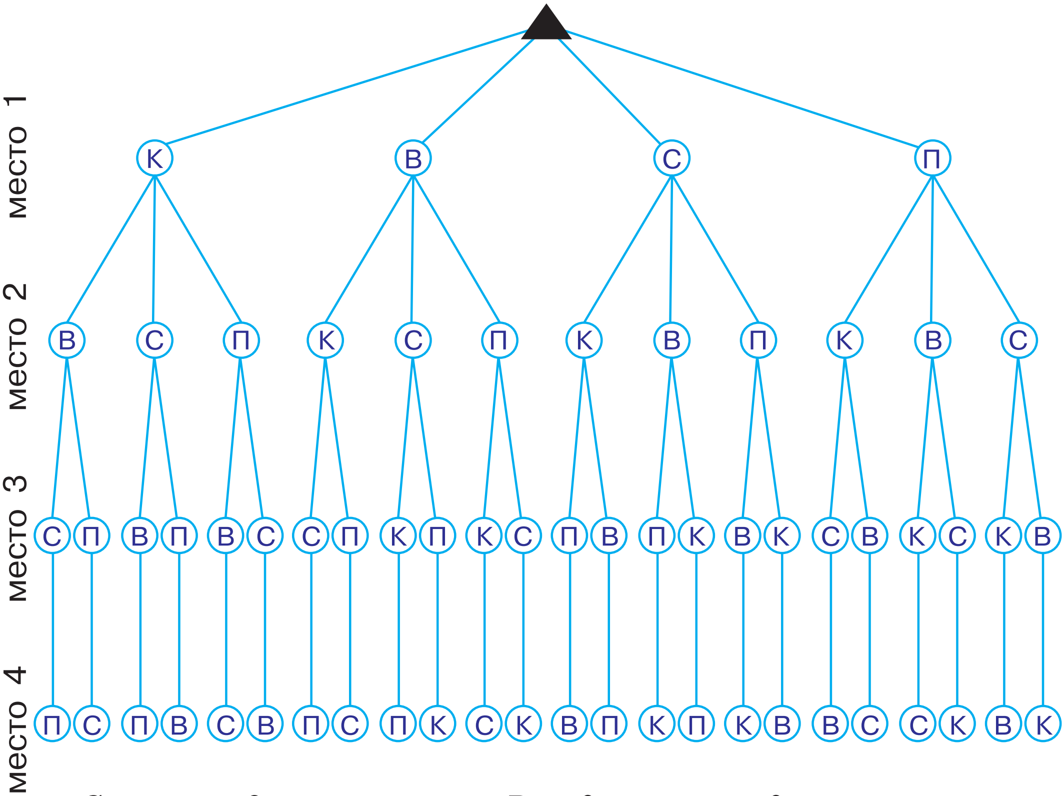
Для выполнения ***задания 15*** важно, чтобы ученики представили ситуацию. Можно даже её проиграть, ориентируясь на рисунок в тетради с двумя свободными партами. Это 4 места, и 4 новых ученика ожидают, когда учитель покажет каждому его место за партой.

Сначала учащиеся знакомятся с текстом ***задания 15*** (вслух и про себя), обсуждают его в парах, а затем приступают к выполнению п. 2.

Если речь идёт о количестве вариантов выбора ученика, которого можно посадить на первое место, очевидно, что учитель может посадить первым либо Колю, либо Васю, либо Сашу, либо Петю. Значит, количество вариантов посадки одного из мальчиков на первое свободное место – 4 , на второе свободное место – 3.

Если на первое место уже посадили кого-либо из мальчиков, то на второе место выбор вариантов может осуществляться из трёх оставшихся, а не из четырёх. Главное, чтобы ученики поняли: если на первое место посадили Колю, то на второе место можно посадить либо Васю, либо Сашу, либо Петю. Далее возможны только два варианта посадить на третье свободное место мальчика, на четвёртое место – один вариант. После заполнения схемы ученики анализируют её и записывают ответ на вопрос задачи (24 варианта). Отметим, что дерево возможных вариантов к ***заданию 15*** можно расположить по-разному (например, поместить корень дерева сверху).

В схеме на с. 29 тетради в один ряд изображены кружки, в которых дети будут записывать все возможные варианты расположения учеников на каждом из четырёх мест. Приведём один из возможных вариантов её заполнения.



Справка для учителя. *В задании находится число перестановок из четырёх элементов:* $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Занятие 16. Задание 16

Цель. Учиться применять способы решения комбинаторных задач при построении отрезков и применении правил порядка выполнения действий.

В ***задании 16*** четыре пункта, в каждом из которых указан способ действия. Соединяя концы отрезков по линейке, ученики отвечают на вопрос «Сколько отрезков получилось?» – и записывают обозначения этих отрезков. Ответы: 1) 3 отрезка; 2) 6 отрезков; 3) 10 отрезков; 4) 15 отрезков.

Справка для учителя. *В задании находится число сочетаний:*

1) из трёх по два: $C_3^2 = \dfrac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3;$

2) из четырёх по два: $C_4^2 = \dfrac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6;$

3) из пяти по два: $C_5^2 = \dfrac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10;$

4) из шести по два: $C_6^2 = \dfrac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15.$

Занятие 17. Задание 17

Цель. Учиться использовать комбинаторные умения при изучении правил порядка выполнения действий.

Выполнение ***задания 17*** может занять всё занятие.

Пользуясь правилами порядка выполнения действий, ученики самостоятельно расставляют знаки арифметических действий. Советуем для проверки результатов самостоятельной работы обменяться тетрадями в парах и потом обсудить коллективно возникшие вопросы.

$\square \overset{\textcircled{3}}{+} \square \overset{\textcircled{2}}{\cdot} (\square \overset{\textcircled{1}}{+} \square)$ $\quad$ $\square \overset{\textcircled{3}}{+} \square \overset{\textcircled{2}}{\cdot} (\square \overset{\textcircled{1}}{-} \square)$

$\square \overset{\textcircled{3}}{-} \square \overset{\textcircled{2}}{\cdot} (\square \overset{\textcircled{1}}{+} \square)$ $\quad$ $\square \overset{\textcircled{3}}{-} \square \overset{\textcircled{2}}{\cdot} (\square \overset{\textcircled{1}}{-} \square)$

$\square \overset{\textcircled{3}}{+} \square \overset{\textcircled{2}}{:} (\square \overset{\textcircled{1}}{+} \square)$ $\quad$ $\square \overset{\textcircled{3}}{+} \square \overset{\textcircled{2}}{:} (\square \overset{\textcircled{1}}{-} \square)$

$\square \overset{\textcircled{3}}{-} \square \overset{\textcircled{2}}{:} (\square \overset{\textcircled{1}}{+} \square)$ $\quad$ $\square \overset{\textcircled{3}}{-} \square \overset{\textcircled{2}}{:} (\square \overset{\textcircled{1}}{-} \square)$

Порядок приведённых вариантов не имеет значения. В дополнение к ***заданию 17*** ученики могут вписать в «окошки» числа и вычислить значения выражений.

Занятие 18. Задание 18

Цель. Учиться заполнять дерево возможных вариантов по частям и делать вывод, объединяя части в целое.

Задание 18. При решении данной задачи ученики заполняют части пяти деревьев возможных вариантов. Пользуясь рисунком в п. 1, ребята выясняют, что количество возможных вариантов спуска детей с горы будет зависеть от того, кто поедет первым. На рисунке – 5 детей. В связи с этим существует и пять вариантов выбора первого ребёнка для спуска, а значит, и схем 5.

При заполнении схемы 1 ученики рассуждают: если первым с горы едет Толя, то за ним поедет либо Вова, либо Миша, либо Коля, либо Надя. А за каждым вторым может поехать каждый из оставшихся трёх ребят. Количество возможных вариантов спуска за каждым – 6. Таких частей в каждой схеме будет 4. Значит, в каждой схеме 24 веточки ($6 \cdot 4 = 24$) и схем таких 5.

Таким образом, ответ на вопрос задачи запишем так: 120 различных вариантов спуска детей с горы на санках ($24 \cdot 5 = 120$).

Приведём по одному верному варианту заполнения каждой схемы из ***задания 18***.

Схема 1

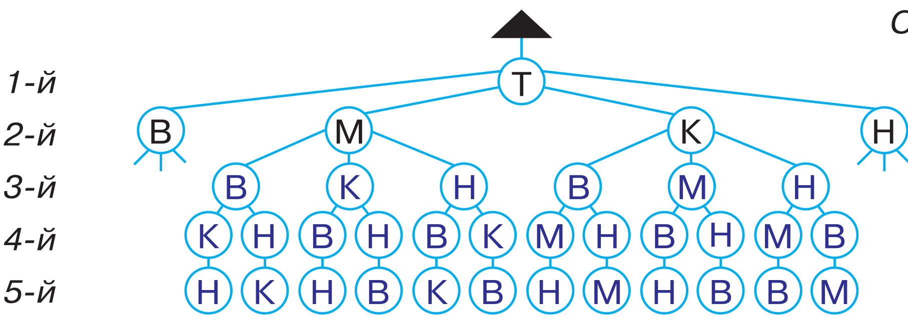


Схема 2

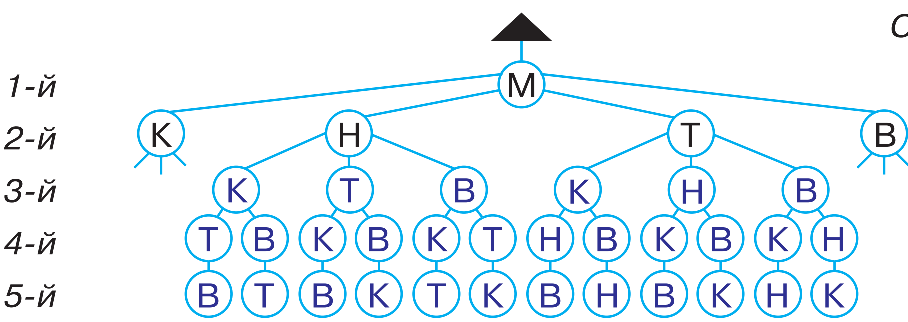


Схема 3

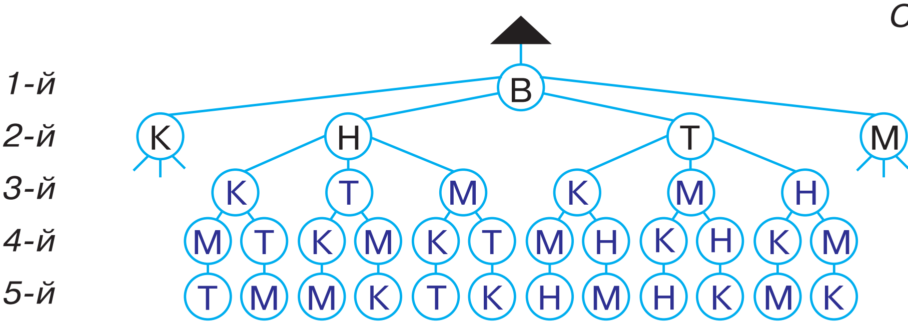


Схема 4

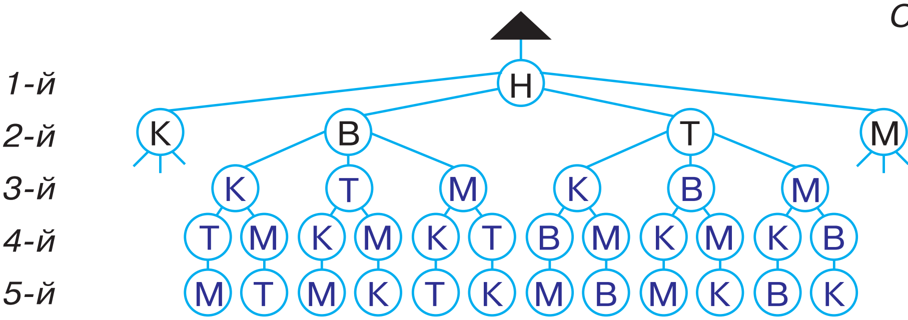
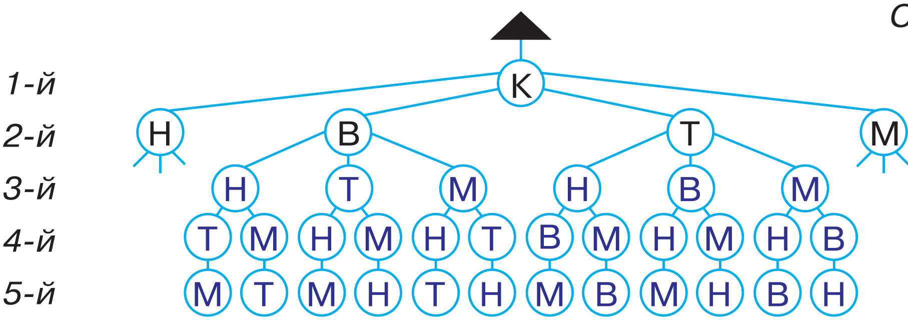


Схема 5



Справка для учителя. *В задании находится число перестановок из пяти элементов:* $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Занятие 19. Задания 19, 20

Цель. Учиться применять способы решения комбинаторных задач в заданиях на правила порядка выполнения действий в числовых выражениях.

Задание 19. Смотри рекомендации к ***заданию 17***.

При выполнении задания советуем провести аналитическую работу и выяснить, какими могут быть первое, второе и третье действия (для первого столбца первое и второе действия могут быть действиями первой ступени (· или :), а третье действие – действие второй ступени (+ или –)). Получаем по правилу произведения 8 комбинаций $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Обобщая полученные выводы, советуем вынести на доску такие модели:

$\boxed{\square \pm \square \ \substack{\cdot \\ :}\ \square \ \substack{\cdot \\ :}\ \square}$ $\boxed{\square \pm \square \pm \square \ \substack{\cdot \\ :}\ \square}$,

а детям предложить, ориентируясь на них, самостоятельно записать все варианты, пользуясь системным перебором.

Можно предложить работать со столбцами по вариантам и проверку организовать в парах.

$\square \overset{3}{+} \square \overset{1}{\cdot} \square \overset{2}{\cdot} \square$	$\square \overset{2}{+} \square \overset{3}{+} \square \overset{1}{\cdot} \square$
$\square \overset{3}{+} \square \overset{1}{\cdot} \square \overset{2}{:} \square$	$\square \overset{2}{+} \square \overset{3}{+} \square \overset{1}{:} \square$
$\square \overset{3}{+} \square \overset{1}{:} \square \overset{2}{\cdot} \square$	$\square \overset{2}{+} \square \overset{3}{-} \square \overset{1}{\cdot} \square$
$\square \overset{3}{+} \square \overset{1}{:} \square \overset{2}{:} \square$	$\square \overset{2}{+} \square \overset{3}{-} \square \overset{1}{:} \square$
$\square \overset{3}{-} \square \overset{1}{\cdot} \square \overset{2}{\cdot} \square$	$\square \overset{2}{-} \square \overset{3}{+} \square \overset{1}{\cdot} \square$
$\square \overset{3}{-} \square \overset{1}{\cdot} \square \overset{2}{:} \square$	$\square \overset{2}{-} \square \overset{3}{+} \square \overset{1}{:} \square$
$\square \overset{3}{-} \square \overset{1}{:} \square \overset{2}{\cdot} \square$	$\square \overset{2}{-} \square \overset{3}{-} \square \overset{1}{\cdot} \square$
$\square \overset{3}{-} \square \overset{1}{:} \square \overset{2}{:} \square$	$\square \overset{2}{-} \square \overset{3}{-} \square \overset{1}{:} \square$

Задание 20. Ответы:

а) 87 + 899 + 24 = 1010;

б) 787 + 878 + 7 = 1672;

в) 938 + 45 + 693 = 1676.

Занятие 20. Задание 21

Цель. Учиться заполнять дерево возможных вариантов по частям и делать вывод, объединяя части в целое (на числовом материале).

В ***задании 21***, воспользовавшись способом перебора, учащиеся заканчивают запись четырёхзначных чисел. Красным выделены цифры в разряде единиц тысяч. В каждом столбце дети переставляют цифры класса единиц, получая их различные комбинации.

Ответ: переставляя цифры в числе 2718, можно записать 24 четырёхзначных числа.

Справка для учителя. *В задании находится число перестановок из четырёх элементов:* $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

В пунктах 3, 4, 5 заполняется только часть дерева возможных вариантов. Сначала для четырёхзначных чисел, в которых 2 тысячи, затем 1 тысяча, затем 8 тысяч. В каждом случае 6 вариантов.

Один из возможных вариантов заполнения схем в п. 3, 4, 5.

Схема 1

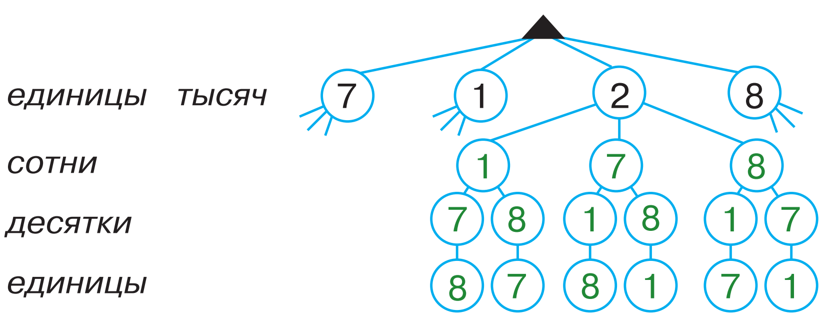


Схема 2

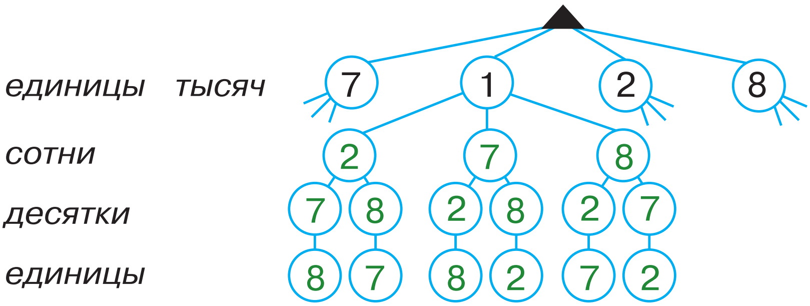
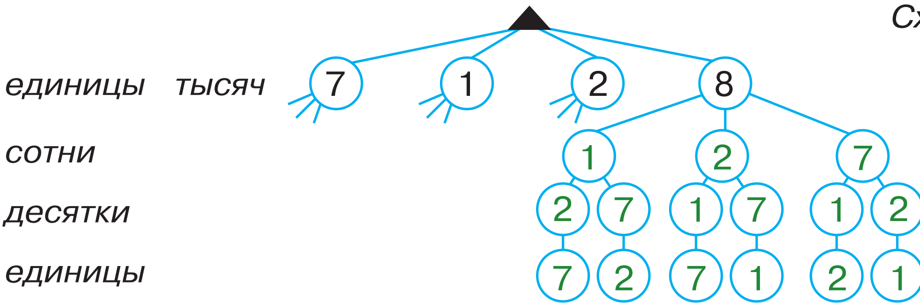


Схема 3



В п. 6 учащиеся делают вывод по аналогии для четырёхзначных чисел, соответствующих условию задачи, в каждом из которых 7 тысяч; их тоже получится 6.

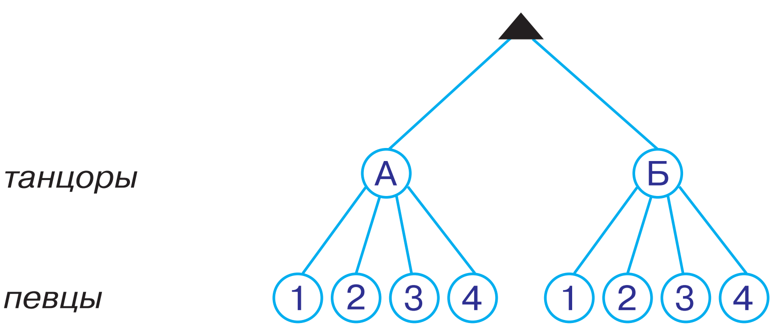
Занятие 21. Задание 22

Цель. Учиться заполнять и строить дерево возможных вариантов.

Задание 22. Прочитав задачу, ученики самостоятельно заполняют схему 1 и комментируют её.

Один из возможных вариантов заполнения схемы 1.

Схема 1

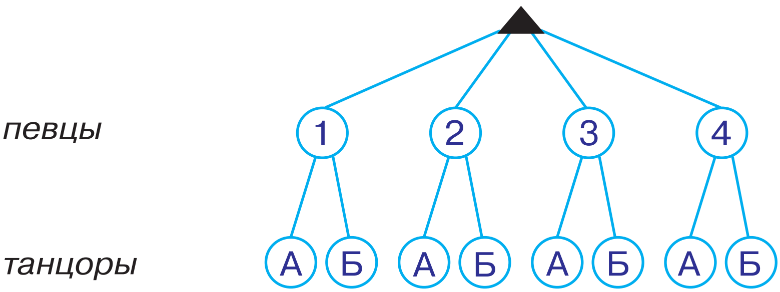


В ряду «танцоры» – 2 варианта выбора, так как в конкурсе принимали участие 2 танцора; а в ряду «певцы» – 4 варианта выбора, так как пели 4 человека. Возможных вариантов выбора одного певца и одного танцора – 8.

Полученный ответ ребята проверяют, заполняя другое дерево возможных вариантов.

Один из возможных вариантов заполнения схемы 2.

Схема 2



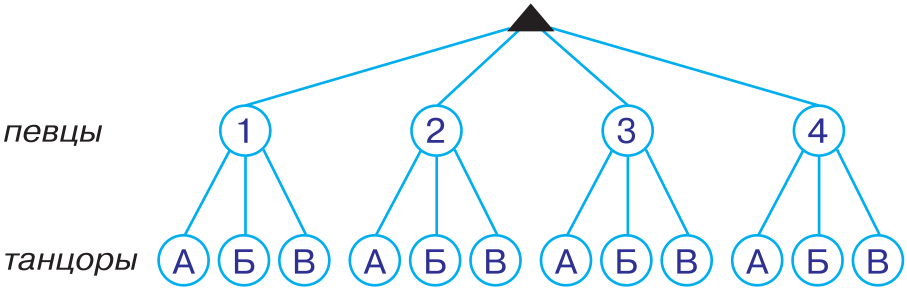
Полезно выяснить у детей, чем отличается схема 2 от схемы 1 (порядком выбора певцов и танцоров).

Ответ: 8 вариантов выбора двух победителей получилось.

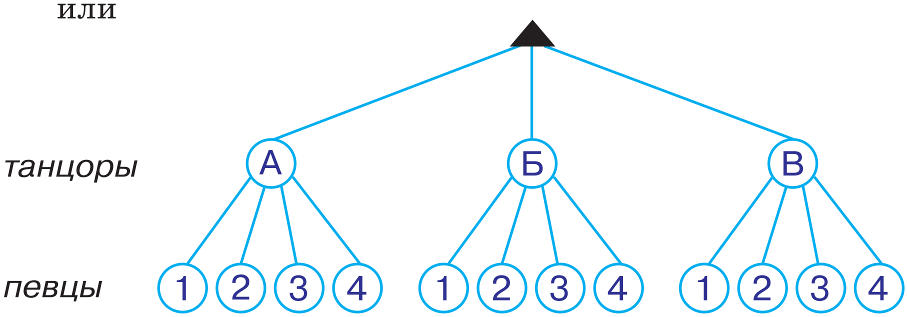
После обсуждения ситуации в п. 4 учащиеся делают вывод по аналогии, учитывая правило произведения, а затем вписывают в «окошко» ответ: 12 (вариантов выбора двух победителей было бы у жюри).

Проверка ответа предполагает построение дерева возможных вариантов, корень которого сверху. Отметим, что это первое задание, в котором дети сами строят схему, до сих пор учащиеся только заполняли уже имеющуюся. Желательно уточнить, с чего будем начинать, вернее, с кого: с танцоров или певцов? Можно построить схему по вариантам: 1-й сначала выбирает победителей-певцов, а 2-й – победителей-танцоров. Школьники самостоятельно рисуют схемы в тетрадях простым карандашом. Затем эти рисунки следует вынести на доску и обсудить фронтально.

Приведём возможные варианты выполнения задания.



или



Желательно сделать вывод о том, что построение дерева возможных вариантов можно выполнить по-разному, но ответ будет одинаковым.

Справка для учителя. *В задании ответ находится по правилу произведения 2 · 4 = 8 и 3 · 4 = 12.*

Занятие 22. Задание 23

Цель. Проверить умения заполнять и анализировать дерево возможных вариантов.

Задание 23 аналогично ***заданию 22.*** Ученики смогут самостоятельно заполнить обе схемы и подсчитать количество возможных вариантов обедов.

Схема 1 начинается с выбора первого блюда (суп гороховый или куриный).

Один из возможных вариантов заполнения схемы 1.

Схема 1

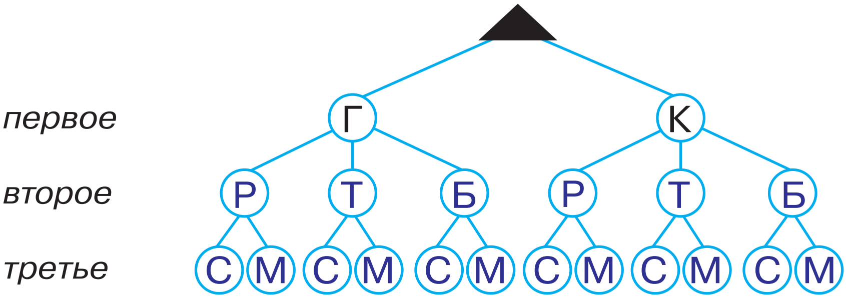
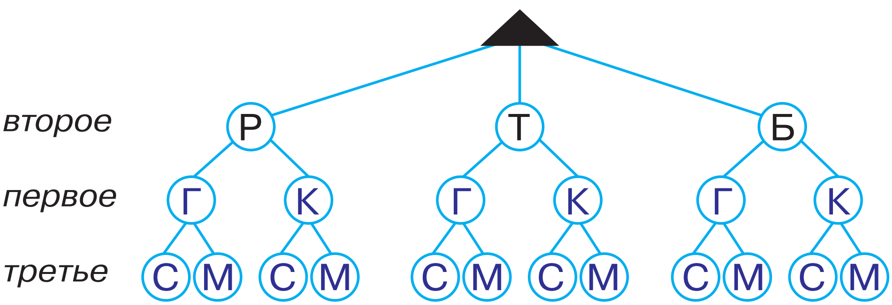


Схема 2 – с выбора второго блюда (или рыба, или тефтели, или бифштекс): так бывает иногда при заказе обеда в кафе, когда посетителей обслуживает официант.

Один из возможных вариантов заполнения схемы 2.

Схема 2



Всего в каждой схеме получается 12 вариантов выбора обеда из трёх блюд.

В п. 3 дети читают схемы и выбирают веточки дерева с обедами, в которые входит бифштекс.

Один из возможных вариантов выполнения задания в п. 3.

Схема 1

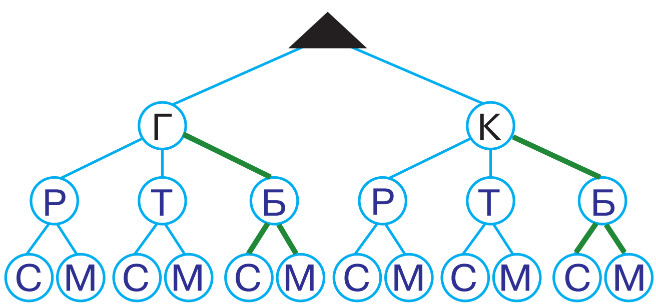
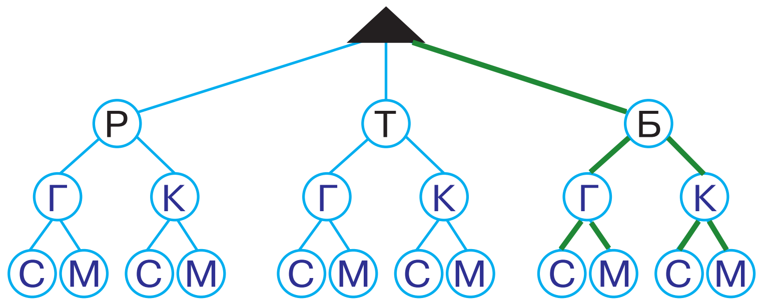


Схема 2



В п. 4 ученики записывают все возможные варианты обеда из трёх блюд, ориентируясь на любую из получившихся схем.

В п. 5 каждый ученик выбирает обед, который ему нравится больше всего (угостил бы маму, пригласил бы друга и сделал бы заказ и т. д.).

Справка для учителя. *В задании ответ находится по правилу произведения $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ или $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.*

Занятие 23. Задание 24

Цель. Учиться заполнять дерево возможных вариантов по частям и делать вывод, объединяя части в целое (на числовом материале).

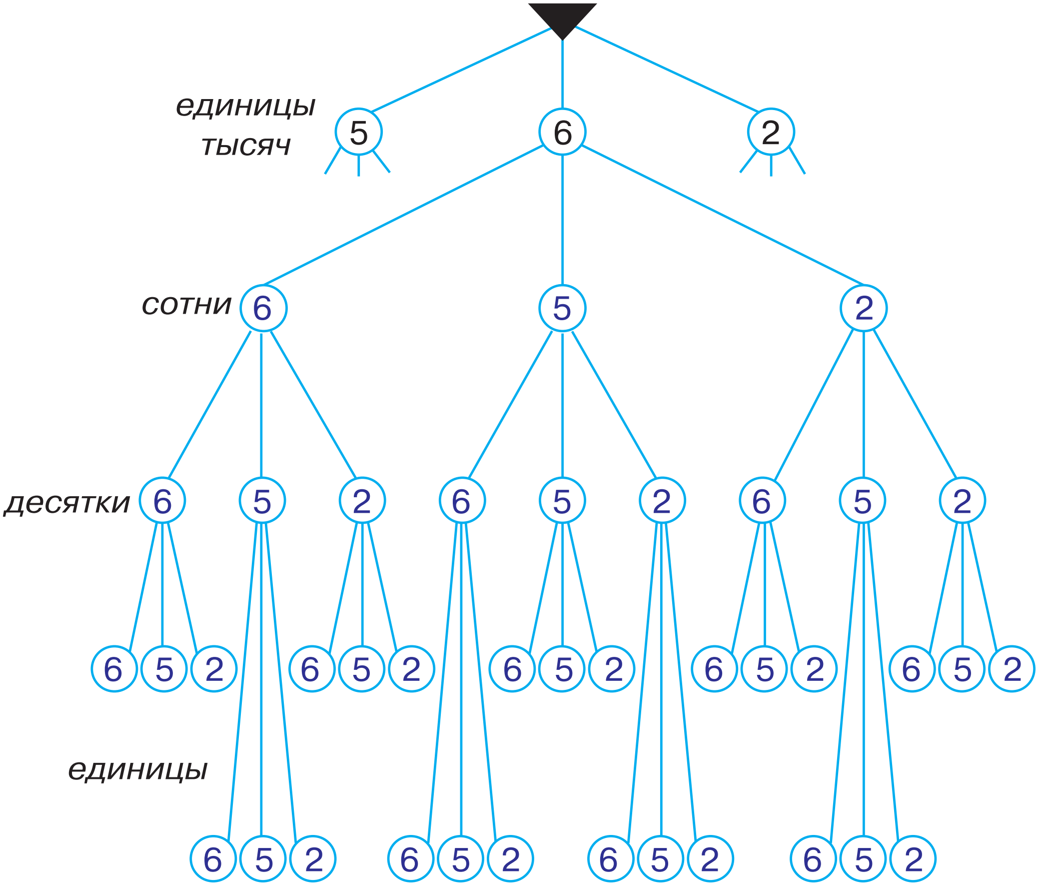
Формулировка ***задания 24*** предполагает повторение трёх данных цифр в записи четырёхзначного числа. Хотя в условии не говорится о повторении, однако без него невозможно составить четырёхзначное число из трёх цифр.

Так же как и в ***задании 21,*** ученики заполняют в тетради только часть схемы (если в разряде единиц тысяч записана цифра 6).

Один из возможных вариантов заполнения схемы в п. 2 представлен на с. 77 данного пособия.

В п. 3 дети подсчитывают количество различных четырёхзначных чисел, в каждом из которых 6 тысяч (27).

Далее в п. 4 ребята строят рассуждения по аналогии для случаев, когда в разряде единиц тысяч четырёхзначного числа стоит цифра 2 (тоже 27 чисел) или цифра 5 (тоже 27 чисел).



В п. 5 записывают ответ на вопрос задачи: можно записать 81 различное четырёхзначное число.

В п. 6 учащиеся используют знание нумерации четырёхзначных чисел.

Советуем при выполнении задания пункта 6 записывать числа не хаотично, а в порядке возрастания:

6. а) 6522, 6525, 6526, 6552, 6555, 6556, 6562, 6565,6566;
   б) 6222, 6225, 6226, 6252, 6255, 6256, 6262, 6265, 6266;
   в) 6522, 6525, 6526;
   г) 6252, 6255, 6256.

А затем вынести схему на доску и обвести на ней веточки, соответствующие числам, полученным при выполнении пункта 6.

В п. 7 и 8 продолжается работа со схемой.

Справка для учителя. *В данной задаче находится число размещений с повторениями из трёх по четыре:* $\overline{A}_3^4 = 3^4 = 81$.

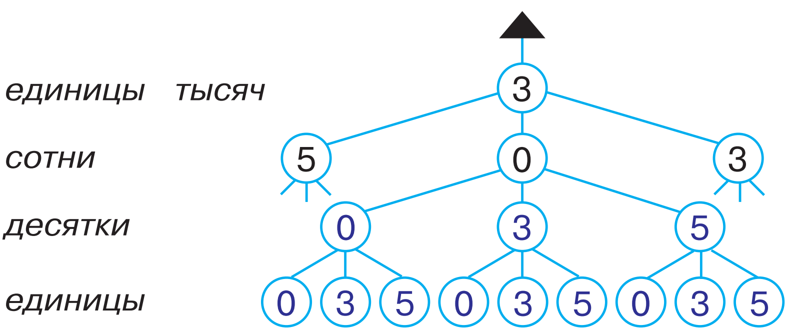
Занятие 24. Задания 25, 26. Самостоятельная работа

Цель. Проверить умения рассуждать, заполнять и комментировать дерево возможных вариантов (на числовом материале).

Задание 25 отличается от предыдущего тем, что по условию в разряде единиц тысяч четырёхзначного числа стоит только цифра 3, однако в классе единиц возможны комбинации трёх данных цифр: 5, 0, 3.

В тетради заполняется часть дерева возможных вариантов, если в разряде сотен стоит цифра 0. В этом случае можно записать 9 четырёхзначных чисел.

Один из возможных вариантов заполнения схемы.



Аналогично 9 четырёхзначных чисел можно записать, если в разряде сотен будет цифра 5 и если в разряде сотен будет записана цифра 3 (тоже 9 чисел), то есть 9 · 3 = 27.

Ответ: 27 четырёхзначных чисел, в которых 3 тысячи, можно записать цифрами 5, 0, 3.

Справка для учителя. *В данной задаче находится число размещений с повторениями из трёх по три:* $\overline{A}_3^3 = 3^3 = 27$.

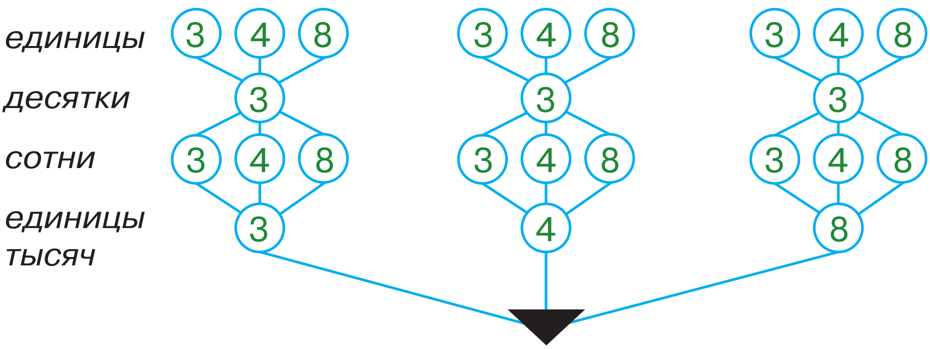
Задание 26. Ответы:
а) $(1 + 2) : 3 = 1$;
б) $1 \cdot (2 + 3) - 4 = 1$;
в) $1 \cdot 2 : (3 + 4 - 5) = 1$.

Занятие 25. Задание 27. Самостоятельная работа

Цель. Проверить умения рассуждать, заполнять и комментировать дерево возможных вариантов (на числовом материале).

Задание 27 аналогично ***заданию 25.*** Важно учесть все условия задачи: в разряде десятков стоит цифра 3, цифры в этих числах могут повторяться.

Приведём один из вариантов заполнения схемы из п. 2.



Ответ: получилось 27 четырёхзначных чисел.

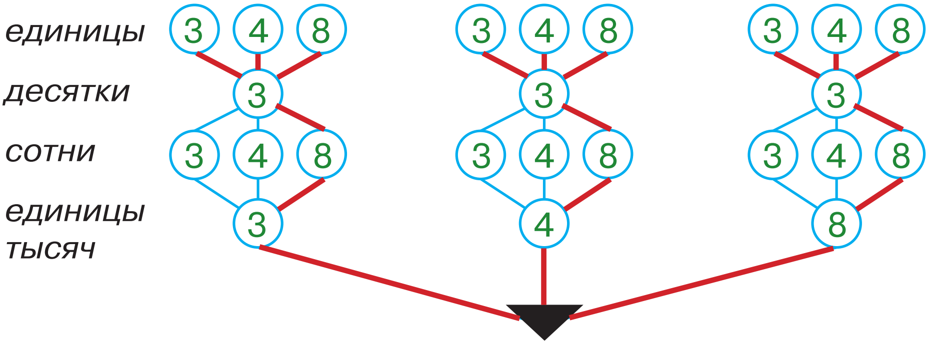
Советуем обсудить ответ, так на схеме явно читается 9 четырёхзначных чисел, остальные «спрятались» или зашифрованы. Можно вынести схему на доску и пригласить учащихся показать на её веточках все возможные четырёхзначные числа.

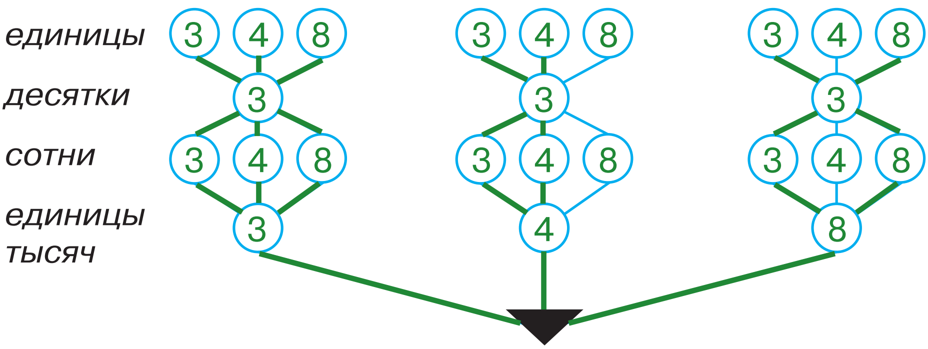
Пункты 3, 4 и 5 содержат задания для работы со схемой.

Так как в заданиях п. 3 по обведению веточек дерева вариантов много, желательно предложить ещё и выписать эти числа. Например:

а) 3833, 3834, 3838, 4833, 4834, 4838, 8833, 8834, 8838;
б) 3333, 3334, 3338, 3433, 3833, 4333, 4434, 8333, 8838.

Один из возможных вариантов выполнения задания.





Справка для учителя. *В данной задаче находится число размещений с повторениями из* трёх *по три:* $\overline{A}_3^3 = 3^3 = 27.$

4 класс

Примерное планирование занятий с использованием тетради «Учимся решать комбинаторные задачи» (авторы Н. Б. Истомина, З. Б. Редько, Н. Б. Тихонова, Е. П. Виноградова)

№ занятия	Цель занятия	№ задания
1	Повторить способы решения комбинаторных задач (системный перебор, заполнение таблицы).	1
2	Проверить сформированность умений заполнять и анализировать дерево возможных вариантов в соответствии с условием задачи.	2
3	Учиться строить дерево возможных вариантов. Использовать комбинаторные умения для работы с заданиями на порядок выполнения действий в выражениях.	3, 4
4	Учиться строить дерево возможных вариантов и выполнять его анализ.	5
5	Строить различные схемы дерева возможных вариантов в зависимости от условия задачи, сравнивать их, выявлять сходство и различия.	6
6	Упражняться в заполнении дерева возможных вариантов. Использовать комбинаторные умения для работы с заданиями на порядок выполнения действий в выражениях.	7, 8
7	Совершенствовать умение заполнять дерево возможных вариантов в зависимости от условия задачи.	9, 10
8	Совершенствовать умения заполнять дерево возможных вариантов в зависимости от условия задачи и самостоятельно строить дерево возможных вариантов.	11
9	Учиться заполнять различные схемы дерева возможных вариантов, соответствующие данному условию.	12

10	Совершенствовать умения заполнять и строить схемы дерева возможных вариантов по частям в соответствии с требованием задания. Учиться делать обобщения.	13
11	Совершенствовать умения заполнять и строить части схемы дерева возможных вариантов. Учиться делать обобщения.	14
12	**Самостоятельная работа № 1.** Проверить умение использовать различные способы решения комбинаторных задач для проверки полученного ответа.	15
13	Совершенствовать умения заполнять таблицу, использовать дерево возможных вариантов для проверки результата. Знакомство с ориентированным графом.	16
14	Формирование умений читать и строить ориентированный граф, соответствующий данному условию. Использовать комбинаторные умения для работы с заданиями на порядок выполнения действий в выражениях.	17, 18
15	Совершенствование умений строить граф и использовать дерево возможных вариантов для проверки. Формирование умения выбирать граф, соответствующий данному условию.	19
16	Использовать комбинаторные умения для работы с заданиями на порядок выполнения действий в выражениях. Формирование умения выбирать граф, соответствующий данному условию и моделям дерева возможных вариантов.	20, 21
17	Учиться выбирать граф, соответствующий данному условию.	22, 23
18	Учиться строить граф и завершать построение графа, соответствующего данному условию.	24, 25
19	Учиться читать, анализировать и использовать граф, отвечая на различные вопросы.	26
20	Учиться достраивать граф в соответствии с условием задачи. Использовать комбинаторные умения для работы с заданиями на порядок выполнения действий в выражениях.	27, 28

21	Учиться строить граф, соответствующий комбинаторной задаче, и использовать граф с целью проверки.	29, 30
22	Учиться использовать граф для проверки утверждений и выбирать граф, соответствующий требованию задания.	31, 32
23	**Самостоятельная работа № 2.** Проверить сформированность умений строить граф и пользоваться способом перебора с целью проверки.	33
24	Совершенствовать умение заполнять таблицу в соответствии с данным условием, использовать граф с целью проверки и завершать построение графа, соответствующего комбинаторной задаче.	34
25	Совершенствовать умения заполнять дерево возможных вариантов, анализировать граф, выделяя необходимую информацию для ответа на вопросы.	35, 36
26	Формирование умений заполнять дерево возможных вариантов, соответствующее задаче, читать граф и строить его в соответствии с данным требованием.	37, 38
27	Учиться дополнять текст на основе анализа информации, представленной в схеме.	39

Ориентируясь на данное планирование, учитель может составить свой план, увеличив или уменьшив количество часов на выполнение заданий из тетради «Учимся решать комбинаторные задачи» для 4 класса, а также подобрать для занятий с учащимися другие комбинаторные задачи.

Методические рекомендации к занятиям. 4 класс

В 1–2 классах учащиеся решали комбинаторные задачи способом перебора (стихийного и системного), установления соответствия между предметными моделями и с помощью таблиц.

В 3 классе дети познакомились со схемой-*деревом возможных вариантов*, научились анализировать и заполнять схему в соответствии с требованием задания, читать её, извлекать информацию и строить схему, ориентируясь на условие задания.

В 4 классе учащиеся будут совершенствовать ранее усвоенные способы решения комбинаторных задач и познакомятся со схемой – *графом*, научатся читать и строить графы, а также использовать их для решения комбинаторных задач.

Занятие 1. Задание 1

Цель. Повторить способы решения комбинаторных задач (системный перебор, заполнение таблицы).

В начале занятия советуем познакомиться с тетрадью, полистать её, прочитать обращение авторов на с. 3. и обратить внимание ребят на то, что на первых занятиях они будут повторять те способы решения комбинаторных задач, с которыми познакомились в 1–2 и 3 классах (задания 1–15).

Задание 1. После того как дети прочитают текст задания, учитель предлагает им обсудить в парах вопросы пунктов 2 и 3. Для обсуждения ответов можно заготовить карточки с буквами А, Б, В, чтобы «оживить» ситуацию выбора двух мальчиков из трёх. Педагог приглашает к доске трёх мальчиков, каждый получает карточку с буквой, а класс предлагает возможные варианты выбора двух мальчиков (их 3: АБ, АВ и БВ).

Одну девочку из пяти можно выбрать пятью способами. Полученные результаты ребята используют в п. 4, где записывают простым карандашом все варианты команды. В итоге получаем записи вида:

АБ 1	АВ 1	БВ 1
АБ 2	АВ 2	БВ 2
АБ 3	АВ 3	БВ 3
АБ 4	АВ 4	БВ 4
АБ 5	АВ 5	БВ 5

В п. 5 учащиеся самостоятельно заполняют таблицу и проверяют полученный ответ.

Ответ: команду можно составить 15 способами.

Справка для учителя. *В задании при нахождении числа вариантов выбора мальчиков находится число сочетаний из трёх по два. Выбор девочки – это число сочетаний из пяти по одному. А общее количество вариантов находится по правилу произведения:*

$$C_3^2 \cdot C_5^1 = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{5}{1} = 3 \cdot 5 = 15.$$

В п. 7 ситуация с выбором членов команды меняется: нужны две девочки, и одну уже выбрали, это № 1.

В пункте б) формулировку следует понимать как требование записать все возможные пары девочек, если одна из них № 1. В этом случае возможно составить 4 пары девочек: 1 – 2, 1 – 3, 1 – 4 и 1 – 5.

При ответе на вопрос в) можно рассуждать так: двух мальчиков из трёх можно выбрать тремя способами (пункт 2), а двух девочек из пяти мы уже выбрали четырьмя способами. При обсуждении пункта в) можно составить таблицу, аналогичную таблице в п. 5.

Ответ: 12 способов составления команды.

Занятие 2. Задание 2

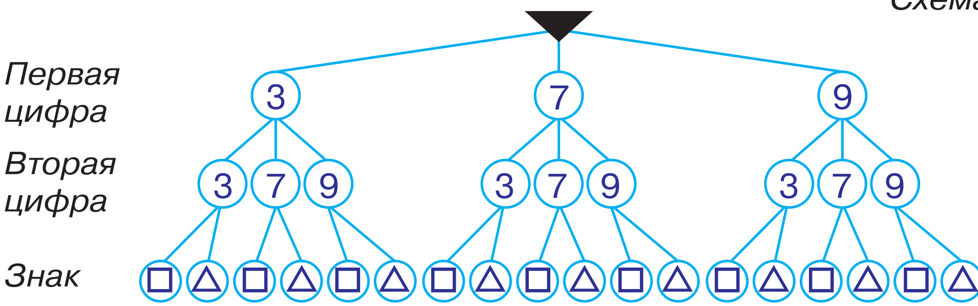
Цель. Проверить сформированность умений заполнять и анализировать дерево возможных вариантов в соответствии с условием задачи.

После чтения текста в п. 1 ***задания 2*** дети соотносят с ним каждую схему. Можно предложить подчеркнуть слова, которые потребовали построения трёх схем («знак, который может стоять либо в конце номера, либо в начале, либо между цифрами»).

При заполнении схемы 1 дети могут рассуждать так: автомобильный номер состоит из трёх знаков, сначала 2 цифры и в конце номера – знак. Тогда на первом месте может стоять любая из трёх цифр, на втором месте также может стоять любая цифра из трёх данных, так как по условию цифры в номере могут повторяться. Получаем 9 вариантов записи двух цифр для номера, для каждого варианта нужно выбрать один из двух знаков. На схеме 1 получаем 18 возможных вариантов автомобильных знаков.

Один из возможных вариантов заполнения схемы 1.

Схема 1



При заполнении схем 2 и 3 ученики могут рассуждать аналогично.

Схема 2

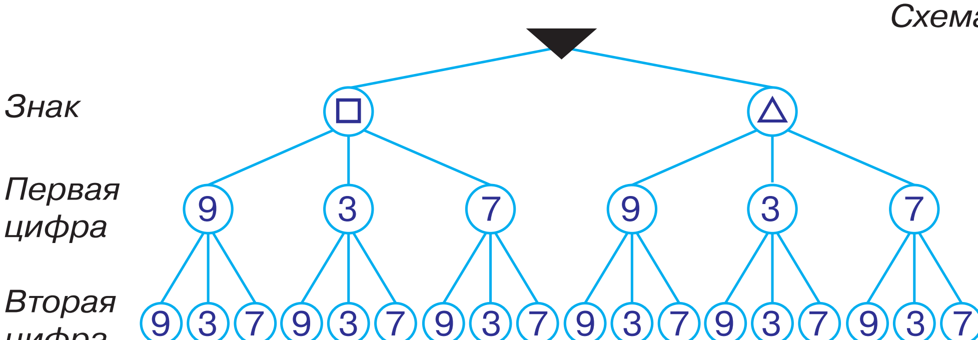
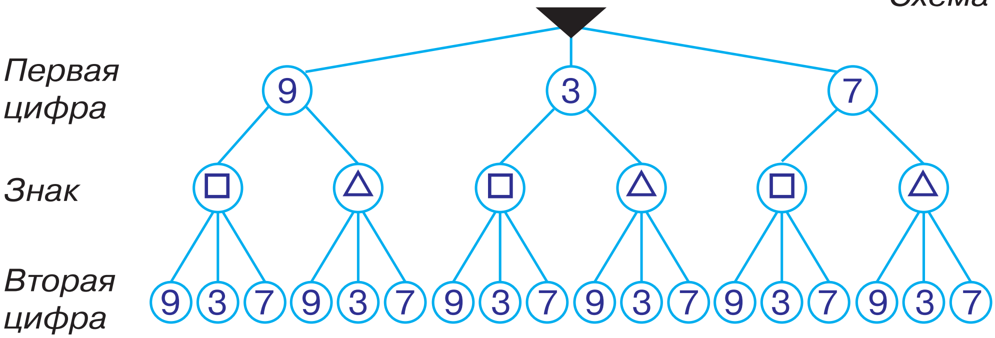


Схема 3



Ответ на вопрос задачи можно записать кратко (54 номера) или подробно (18 + 18 + 18 = 54 автомобильных номера).

В п. 4 дети выполняют самостоятельно и обводят на каждой схеме по 6 веточек, соответствующих требованию.

Справка для учителя. *В задании количество вариантов для каждого расположения знака в автомобильном номере находится по правилу произведения 3 · 3 · 2 = 18 (схема 1), 2 · 3 · 3 = 18 (схема 2) и 3 · 2 · 3 = 18 (схема 3), а общее количество вариантов автомобильных номеров находится по правилу суммы 18 + 18 + 18 = 54.*

Занятие 3. Задания 3, 4

Цель. Учиться строить дерево возможных вариантов. Использовать комбинаторные умения для работы с заданиями на порядок выполнения действий в выражениях.

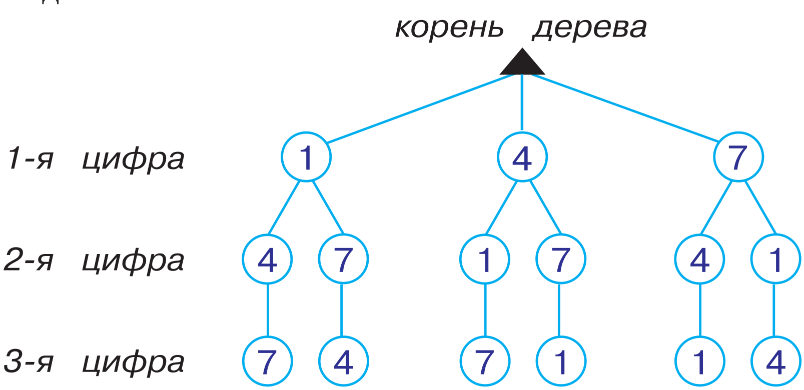
Ситуация, описанная в ***задании 3***, знакома ребятам. Формулировка интересна тем, что в ней идёт речь о комбинациях, связанных с перестановкой трёх цифр. После ознакомления с текстом задания рекомендуем выяснить, как ребята понимают слово «комбинации».

Слово «комбинация» (от латинского *combinatio*) означает взаимно обусловленное расположение ряда элементов (предметов), в данном случае цифр.

В процессе обсуждения ученики приходят к выводу, что различные комбинации получаются в том случае, когда цифры расположены в числе по-разному. Это позволяет перейти к п. 2. Получится 6 вариантов набора телефонного номера.

В п. 3, проверяя свой ответ, дети будут простым карандашом рисовать дерево возможных вариантов, соответствующее условию задачи, и заполнять его. Советуем дать время на самостоятельное выполнение рисунка и понаблюдать за работой класса, оказывая индивидуальную помощь по мере надобности.

Один из возможных вариантов заполнения схемы имеет вид:



П. 4. Ответ: можно составить 6 комбинаций, переставляя цифры 1, 4 и 7.

Справка для учителя. *В задании находится число перестановок из трёх элементов:* $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Выполнение ***задания 4*** требует не только знания правил порядка выполнения действий в выражениях, но и комбинаторных умений. Учащиеся вставляют знаки арифметических действий простым карандашом и находят значения выражений. Например:

а) $2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 = 10$;
б) $2 \cdot 2 : 2 : 2 = 1$;
в) $2 : 2 + 2 : 2 = 2$;
г) $2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 8$;
д) $2 \cdot 2 + 2 - 2 = 4$;
е) $2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 = 6$;
ж) $2 - 2 + 2 - 2 = 0$;
з) $2 \cdot 2 + 2 : 2 = 5$.

Следует иметь в виду, что возможны различные варианты выбора и расстановки знаков арифметических действий в соответствии с требованием задания.

Например:
для а) возможен вариант $2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 10$;
для б) возможен такой вариант: $2 - 2 + 2 : 2 = 1$;
для д) возможны варианты:
$2 + 2 + 2 - 2 = 4$;
$2 - 2 + 2 + 2 = 4$;
$2 - 2 + 2 \cdot 2 = 4$;
$2 \cdot 2 \cdot 2 : 2 = 4$
и т. д.

Советуем дать возможность высказаться всем желающим и постараться проверить все предложенные детьми варианты расстановки знаков.

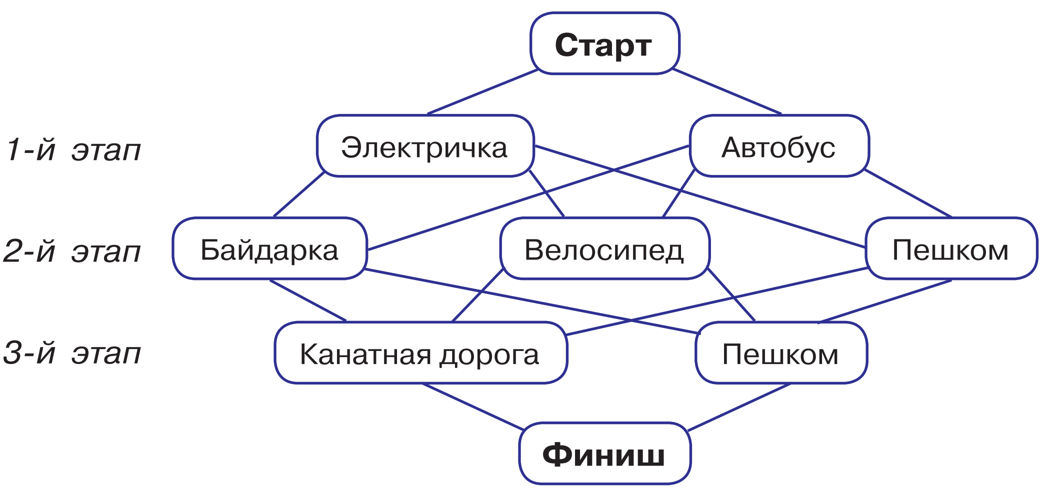
Занятие 4. Задание 5

Цель. Учиться строить дерево возможных вариантов и выполнять его анализ.

После знакомства с текстом ***задания 5*** дети самостоятельно выполняют п. 2, а затем обсуждают его.

Ответы: а) 2; б) 3; в) 2.

Пользуясь текстом задачи, учащиеся записывают на доске варианты передвижений на этапах маршрута и соединяют их линиями.



Каждая линия должна быть результатом анализа текста и рассуждений ребят. Например, после записи слова «Старт» выясняем, какие варианты даны в задаче для начала пути (электричка, автобус). Дети соединяют их линиями со словом «Старт» и т. д.

Далее педагог предлагает классу показать на данной схеме следующие варианты маршрута экскурсии:

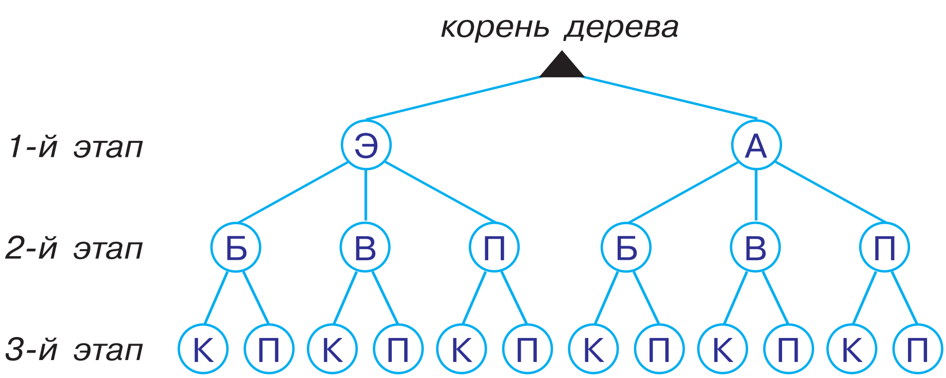
1) электричка → велосипед → пешком;
2) автобус → байдарка → канатная дорога;
3) электричка → байдарка → пешком.

После этого учитель выясняет, можно ли ответить на вопрос задачи, пользуясь этой схемой. Дети приходят к выводу, что это сделать нелегко, так как линии переплетаются и все варианты маршрутов трудно подсчитать.

Такой вывод позволяет перейти к построению дерева возможных вариантов, соответствующего задаче.

Рекомендуем заранее условиться, что будем вносить этапы маршрута в схему в том порядке, в котором о них говорится в тексте задачи.

Один из возможных вариантов заполнения схемы.

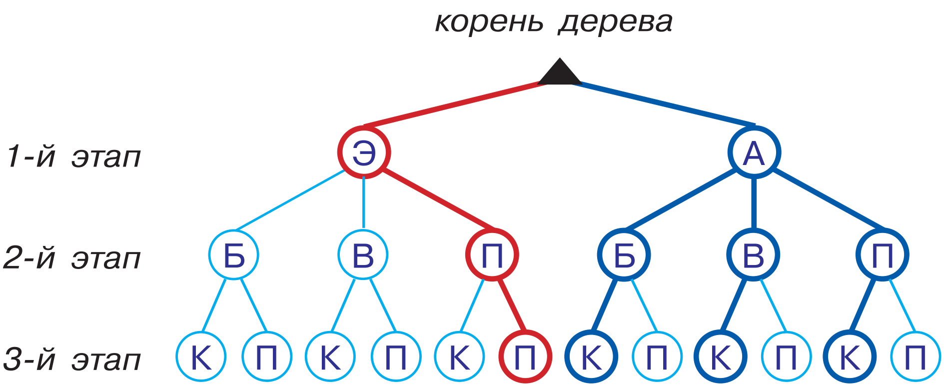


Вполне возможно, что в классе найдутся дети, которые иначе расположат буквы в записи каждого этапа (например, А и Э – на 1-м этапе). В этом случае схему следует вынести на доску и проверить: она будет верной, если учтены все этапы маршрута.

Ответ: возможны 12 вариантов составления маршрута поездки.

Справка для учителя. *Ответ находится по правилу произведения 2 · 3 · 2 = 12, где 2, 3 и 2 – количество вариантов выбора способов передвижения на первом, втором и третьем этапах.*

Затем ребята смогут самостоятельно выполнить задания пунктов 4, 5 и 6. Советуем организовать проверку результатов самостоятельной работы в парах. Несколько различных вариантов заполнения дерева целесообразно вынести на доску и обсудить.



В п. 7 желательно не только записать, но и выделить на схеме этапы понравившегося маршрута.

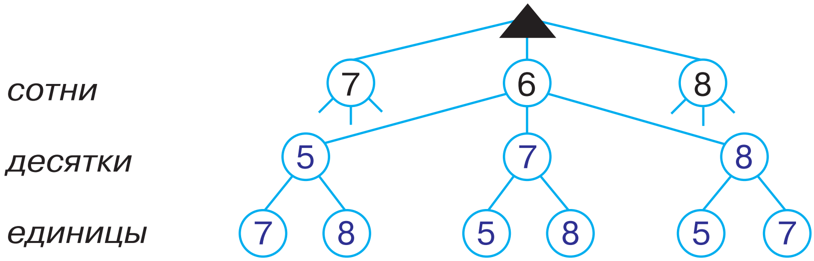
Занятие 5. Задание 6

Цель. Учиться заполнять различные части схемы дерева возможных вариантов, сравнивать их, выявлять сходства и различия.

После чтения задачи ученики самостоятельно выполняют п. 2, который помогаем им лучше разобраться в её условии (нужно подчеркнуть цифру 5, так как код сейфа – трёхзначное число, которое больше 600). После обсуждения ответа п. 2 дети самостоятельно выполняют п. 3–5.

Один из возможных вариантов заполнения схемы.

Схема 1



Всего 6 вариантов записи кода.

Анализ схемы 1 поможет ребятам записать ответы в п. 4 и 5.

Ответ задачи: возможны 18 вариантов записи кода.

Справка для учителя. *Ответ находится по правилу произведения 3 · 3 · 2 = 18, где 3, 3 и 2 – количество вариантов выбора первой, второй и третьей цифр числа.*

Прежде чем приступить к самостоятельному выполнению п. 6, советуем сравнить требования к записи кода сейфа в п. 1 и п. 6, чтобы обратить внимание детей на слова «цифры в записи числа могут повторяться».

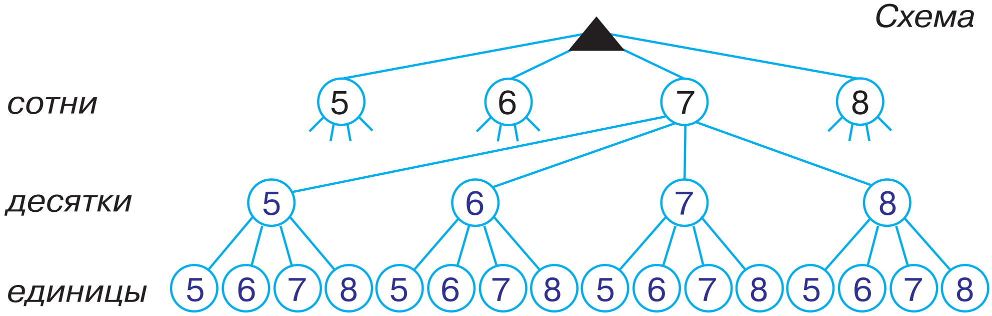
Для этого педагог может обратиться к классу с вопросами:

– Чем отличается код сейфа в п. 1 от кода в п. 6? (В п. 1 число больше 600 и цифры в нём не повторяются, а в п. 6 цифры могут повторяться.)

– Как это отличие повлияет на решение? (Количество вариантов записи кода будет больше в п. 6).

Следует иметь в виду, что в тетради на с. 13 в схеме 2 – «ловушка» (в первом ряду от каждого из кружочков с цифрами 5, 6 и 8 проведены 3 линии, а их должно быть 4).

Схема 2а



Ответы: б) 16; в) 16, 16, 16; г) 64.

Если у учащихся возникнут затруднения при выполнении заданий в) и г) в п. 6, рекомендуем вынести на доску схемы 2 и 2а и предложить ребятам прочитать их, то есть определить, сколько чисел записано на веточках каждой схемы.

Занятие 6. Задания 7, 8

Цель. Упражняться в заполнении дерева возможных вариантов. Использовать комбинаторные умения для работы с заданиями на порядок выполнения действий в выражениях.

Задание 7 – для самостоятельной работы в парах с последующим фронтальным обсуждением. Ответы:

а) $(24 - 18) : 6 + 3 \cdot 2 = 7$;
б) $24 - 18 : (6 + 3) \cdot 2 = 20$;
в) $(24 - 18 : 6 + 3) \cdot 2 = 48$.

Возможно дополнить работу с заданием, предложив классу то же выражение, но с другими значениями и новым заданием. Требуется выяснить, в каких равенствах нужно поставить скобки, чтобы они стали верными.

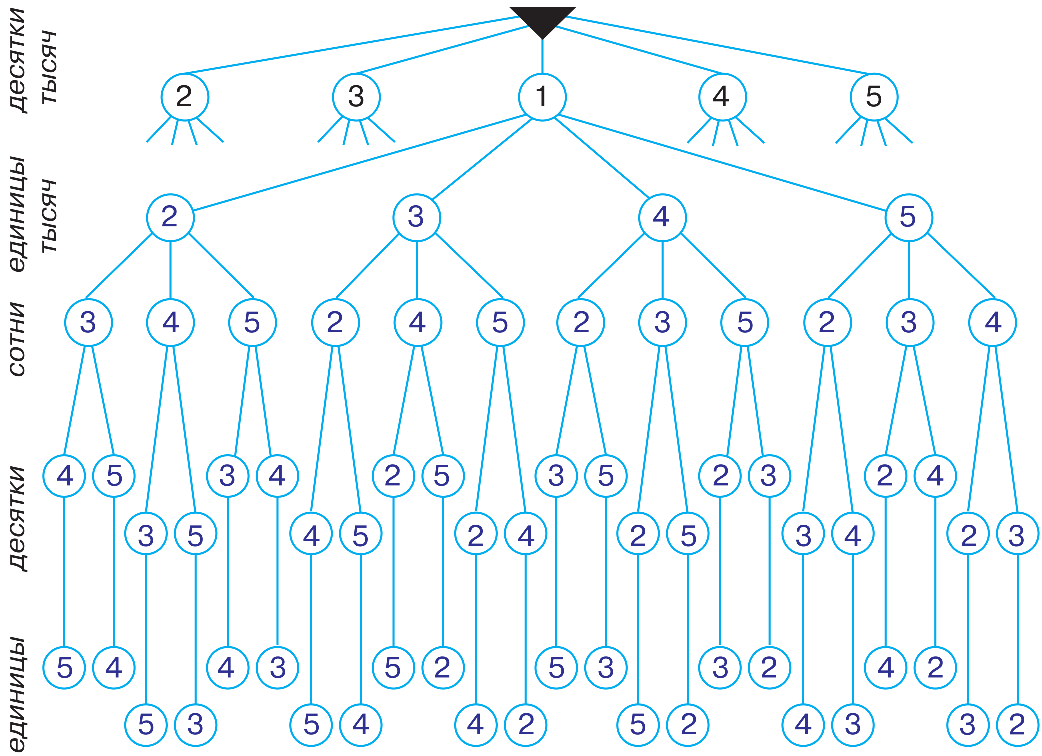
г) $24 - 18 : 6 + 3 \cdot 2 = 15$;
д) $24 - 18 : 6 + 3 \cdot 2 = 12$;
е) $24 - 18 : 6 + 3 \cdot 2 = 27$.

Ответ: в первом и во втором равенствах.

г) $24 - (18 : 6 + 3 \cdot 2) = 15$;
д) $24 - (18 : 6 + 3) \cdot 2 = 12$;
е) $24 - 18 : 6 + 3 \cdot 2 = 27$.

Задание 8. Дети самостоятельно заполняют часть дерева возможных вариантов (на с. 15) и подсчитывают количество веточек дерева, на которых записаны все возможные варианты пятизначных чисел, где в разряде десятков тысяч стоит цифра 1. Таких чисел 24.

Один из возможных вариантов выполнения задания смотри на с. 94 данного пособия.



При выполнении пункта 3 ученики действуют по аналогии, а для записи ответа на вопрос задачи повторяют 24 варианта 5 раз, получают 120 различных пятизначных чисел.

Ответ: 120 чисел.

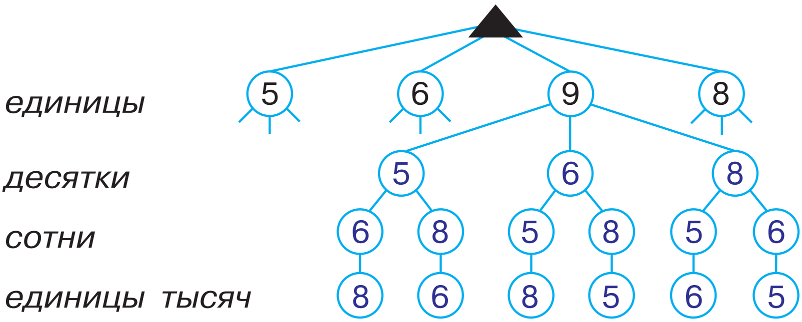
Справка для учителя. *В задании находится число перестановок из пяти элементов:* $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Занятие 7. Задания 9, 10

Цель. Совершенствовать умение заполнять дерево возможных вариантов в зависимости от условия задачи.

Задание 9 п. 2 – для самостоятельной работы. Один из возможных вариантов выполнения задания (с. 95).

При выполнении п. 3 дети могут ориентироваться на уже построенную схему (п. 2). Советуем организовать построение соответствующих схем по группам (1-й ряд – цифра 5 в разряде единиц, 2-й ряд – цифра 6 в разряде единиц, 3-й ряд – цифра 8 в разряде единиц) с последующим обсуждением полученных результатов.



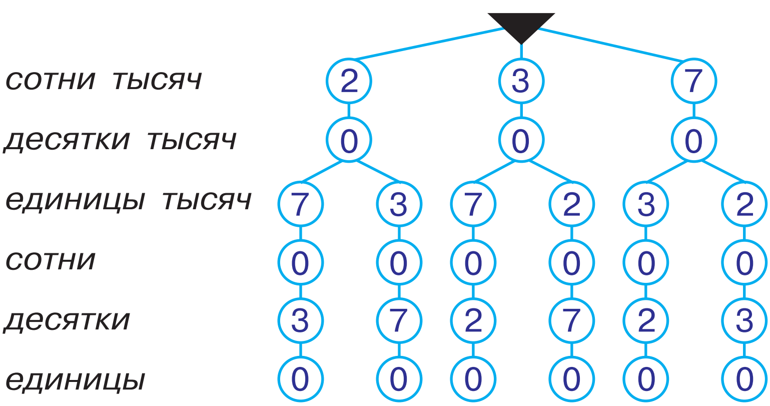
Ответ на вопрос ***задания 9:*** 24 числа.

Справка для учителя. *В задании находится число перестановок из четырёх элементов:* $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Задание 10. Для выбора схемы важно внимательно прочитать условие задачи. Но даже в этом случае выбрать схему, соответствующую условию задачи, достаточно трудно без её заполнения. Верной является схема 2, но вполне возможно, что некоторые ученики выберут схему 1. В этом случае советуем предложить ребятам заполнить выбранную схему простым карандашом. Это поможет им осознать свою ошибку.

Один из возможных вариантов выполнения п. 2.

Схема 2



Справка для учителя. *В задании находится число перестановок из трёх элементов:* $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

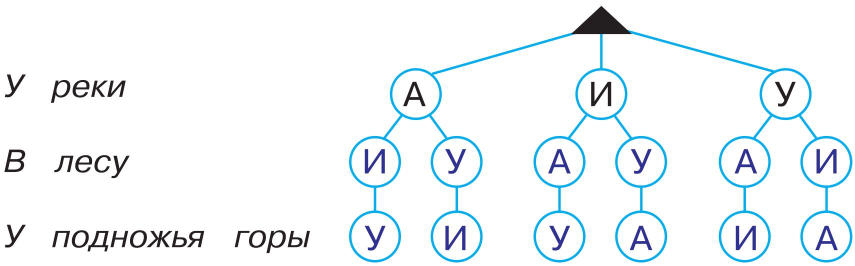
Занятие 8. Задание 11

Цель. Совершенствовать умения заполнять дерево возможных вариантов в зависимости от условия задачи и самостоятельно строить дерево возможных вариантов.

Прочитав текст задачи, учащиеся самостоятельно выполняют п. 2.

Один из возможных вариантов заполнения схемы 1.

Схема 1



Задание п. 3 предлагаем выполнить коллективно, так как в нём важны рассуждения, которые определяют способ решения.

Ребятам нужно представить, что поросята выбирали место для домика по очереди.

а) Наф-Наф выбирал место для домика первым. Сколько у него было вариантов выбора? (3)

б) Ниф-Ниф выбирал место вторым. Сколько у него осталось вариантов выбора места для домика? (2)

в) Нуф-Нуф выбирал место третьим. Сколько у него осталось вариантов? (1)

Продолжите эти рассуждения, задав ребятам вопросы:

– Был ли у Нуф-Нуфа выбор?

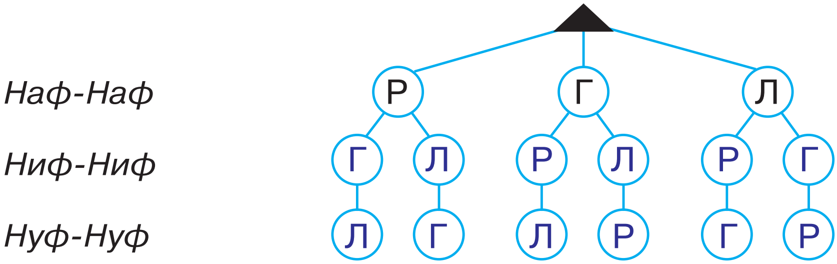
– У кого из поросят было больше вариантов выбора?

– Почему?

Затем можно предложить ребятам выполнить самостоятельно задания п. 4–6.

Один из возможных вариантов выполнения п. 4.

Схема 2



Справка для учителя. *В задании находится число перестановок из трёх элементов:* $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Так же как и в схеме 1, в схеме 2 получается 6 вариантов выбора домиков.

В п. 5 дети читают схему и выделяют цветом ту или иную веточку дерева в соответствии с указанным вариантом выбора.

Один из возможных вариантов выполнения п. 5.

Схема 1

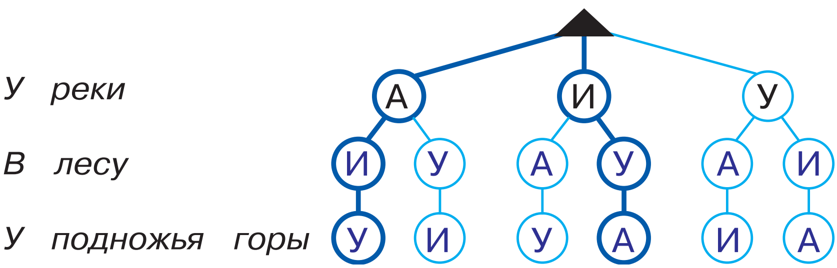
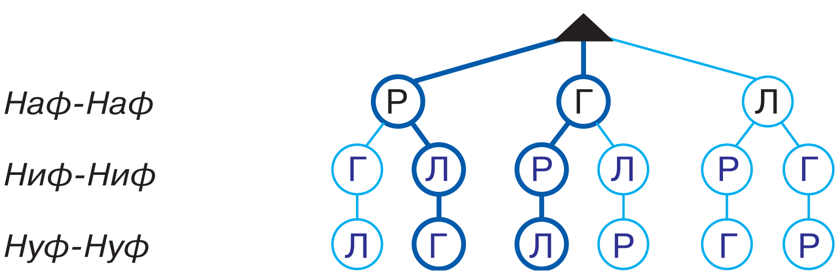


Схема 2



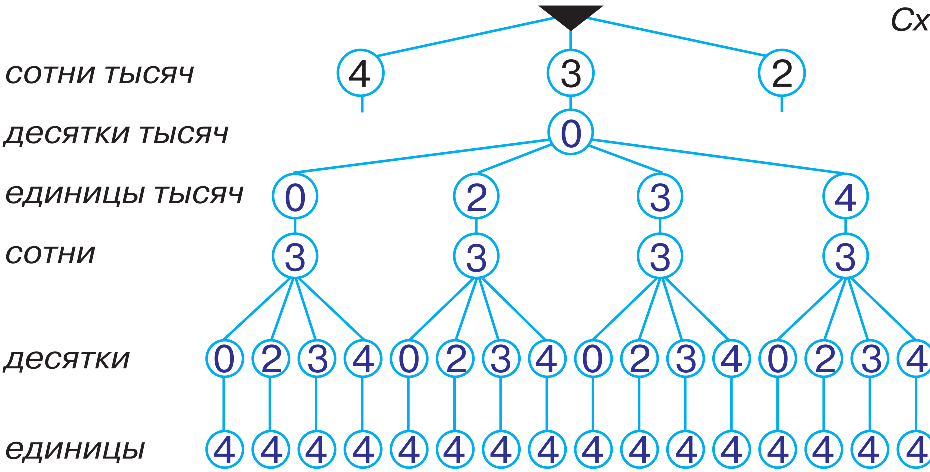
Занятие 9. Задание 12

Цель. Учиться заполнять различные схемы дерева возможных вариантов, соответствующие данному условию.

После прочтения текста ***задания 12*** ученики выполняют п. 2 самостоятельно.

Один из возможных вариантов заполнения схемы 1 приведён ниже.

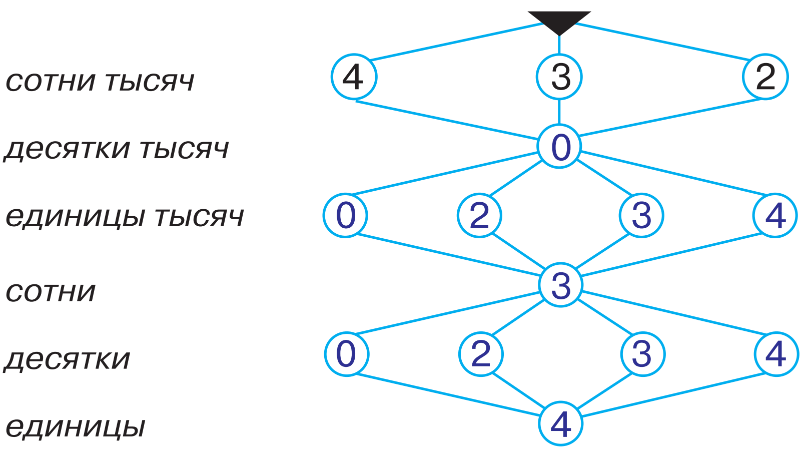
Схема 1



Ответы: 2) 16; 3) 16, 16; 4) 48.

После записи ответов п. 2, 3, 4 можно перейти к совместному выполнению п. 5. Для ответа на вопрос следует обратиться к построенному дереву возможных вариантов и к модели числа.

Схема 2



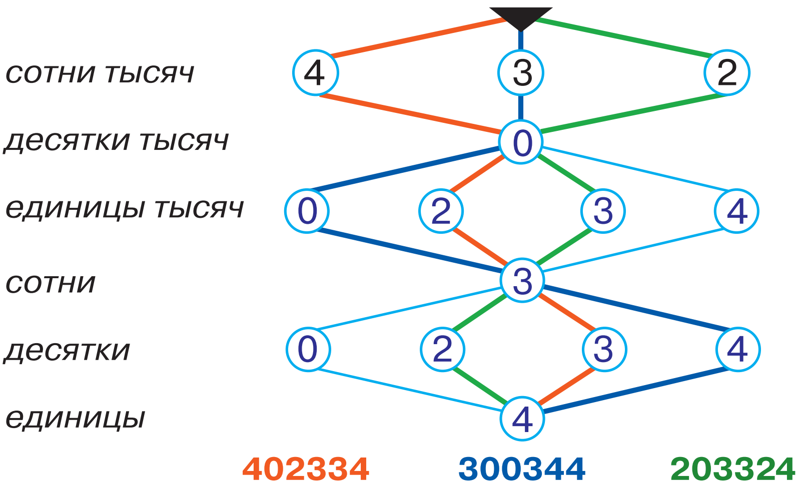
Не все ребята сразу могут заметить, что схема 2 подходит к задаче, ведь она очень отличается от схемы 1. Поэтому для ответа на п. 5 необходимо приступить к её заполнению, с которым дети могут справиться самостоятельно.

После того как они это сделают, советуем провести со схемой 2 следующую работу:

1. Показать на схеме 2 пару чисел, полученных при заполнении схемы 1.

2. Отметить разными цветами на схеме 2 веточки с числами и предложить ребятам назвать эти числа. (Это лучше сделать на интерактивной доске или вынести схему на доску.)

Схема 2



Советуем показать числа из п. 6 на схеме 2.

Желательно показать и другие шестизначные числа, в каждом из которых, например:

1) 400 тысяч (400304, 400324, 400334, 400344);

2) 404 тысячи (404304, 404324, 404334, 404344);

3) 3033 сотни (303304, 303324, 303334, 303344);

4) 2023 сотни (202304, 202324, 202334, 202344).

Справка для учителя. *В задании количество вариантов можно найти по правилу произведения* $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$.

На этом же занятии полезно познакомить детей ещё с одним способом решения этой комбинаторной задачи, который связан с использованием другой модели. В данном случае модели шестизначного числа, которую учитель изображает на доске (каждое «окошко» – разряд шестизначного числа).

Затем ученики работают с моделью под руководством учителя:

– Впишите в модель числа те цифры, про которые точно известно по условию, в каких разрядах они стоят.

	0		3		4

Потом дети подписывают под пустыми «окошками» цифры, которые могут стоять в этих разрядах.

	0		3		4
2		0		0	
3		2		2	
4		3		3	
		4		4	

Следует обратить особое внимание на первое «окошко»: ведь для записи первой цифры возможны только 3 варианта, а не 4, как для других. Почему? (Потому что в записи многозначного числа первая цифра не может быть нулём.)

Далее можно предложить найти общее количество вариантов, выполнив арифметические действия с полученными числами. Можно даже составить равенство, в котором пропущены знаки арифметических действий. Их нужно вставить так, чтобы равенство стало верным, ведь количество вариантов (48) уже известно (3 ... 4 ... 4 = 48).

		0		3		4	
	2		0		0		
	3		2		2		
	4		3		3		
			4		4		
Количество вариантов	3	·	4	·	4	=	48

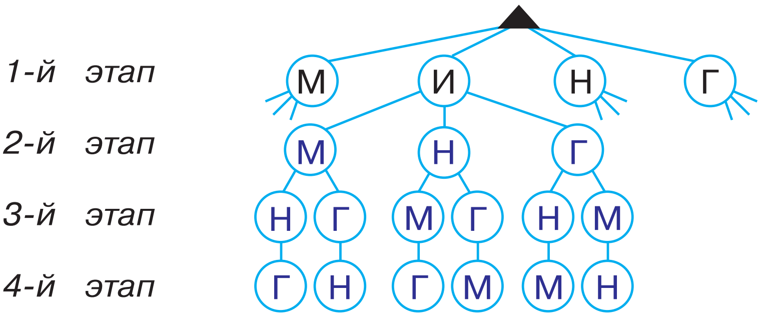
Занятие 10. Задание 13

Цель. Совершенствовать умения заполнять и строить схемы дерева возможных вариантов по частям в соответствии с требованием задания. Учиться делать обобщения.

После чтения текста ***задания 13*** учащиеся самостоятельно работают с п. 2 и 3, после чего следует организовать фронтальную проверку.

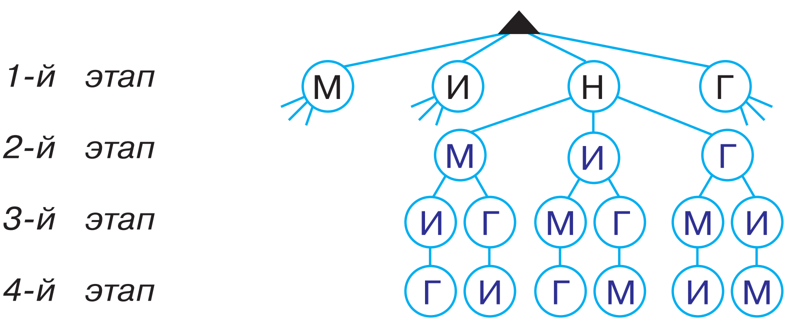
Один из возможных вариантов заполнения схемы 1.

Схема 1



Один из возможных вариантов заполнения схемы 2.

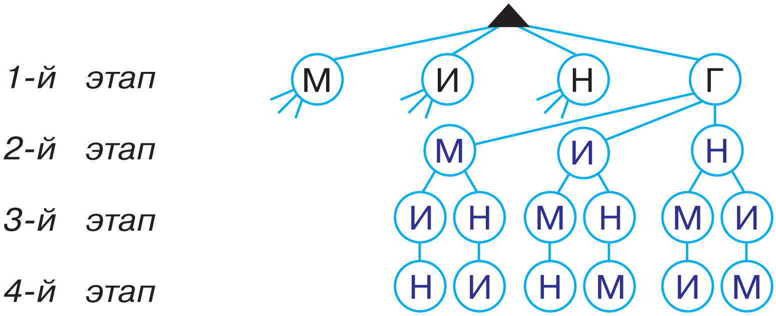
Схема 2



Перед тем как предложить ребятам выполнить самостоятельно задание 4 п. б), обсудите, как будет располагаться эта схема (линии пойдут от буквы Г), как её нужно нарисовать, чтобы всё уместилось (расположить её левее), сколько кружков будет в первом, втором и третьем рядах (столько же, сколько в схемах 1 и 2).

Один из возможных вариантов построения и заполнения схемы 3 смотри на с. 102 данного издания.

Схема 3



После заполнения схемы 3 можно предложить ребятам найти веточку дерева, на которой показано, что участники эстафеты выстраиваются в таком порядке: **Г – И – М – Н**. Или записать все варианты расстановки ребят по этапам, в которых будут принимать участие мальчики – Миша, Илья и Глеб – в следующем порядке: М – И – Г (два варианта: **НМИГ** и **МИГ**Н).

Справка для учителя. *В задании находится число перестановок из четырёх элементов:* $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Занятие 11. Задание 14

Цель. Совершенствовать умения заполнять и строить части схемы-дерева возможных вариантов. Учиться делать обобщения.

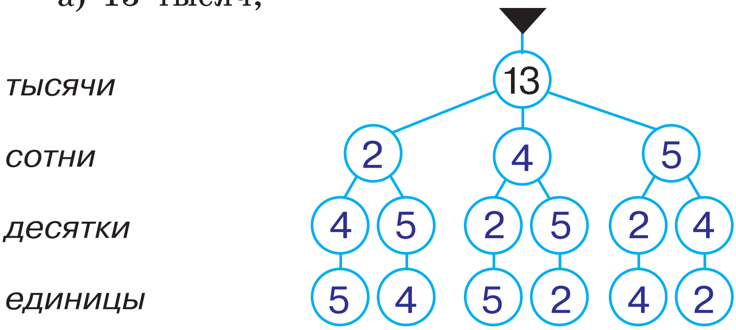
При выполнении п. 2 рекомендуем выяснить, чем похожи все числа в первом столбце (в каждом числе 12 тысяч). При формулировке правила желательно обратить внимание детей на то, что в каждой паре чисел одинаковая цифра стоит в разряде сотен, а в разрядах десятков и единиц цифры меняются местами. Таким образом, столбцы составляются по правилу: в каждом столбце – одинаковое количество тысяч, а цифры в классе единиц меняются местами. Во всех столбцах 24 пятизначных числа.

В п. 3 осуществляется проверка полученного результата посредством построения дерева возможных вариантов.

Приведём варианты заполнения схем для пятизначных чисел, в которых:

а) 13 тысяч;

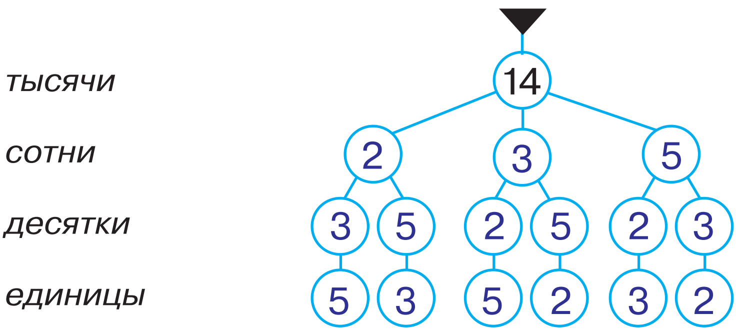
Схема 1



Получилось 6 различных пятизначных чисел.

б) 14 тысяч;

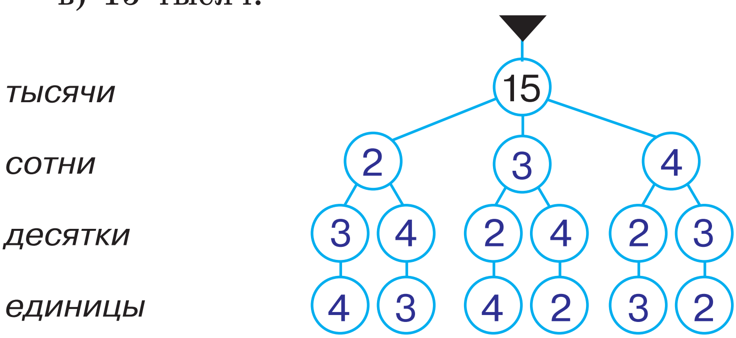
Схема 2



Получилось 6 различных пятизначных чисел.

в) 15 тысяч.

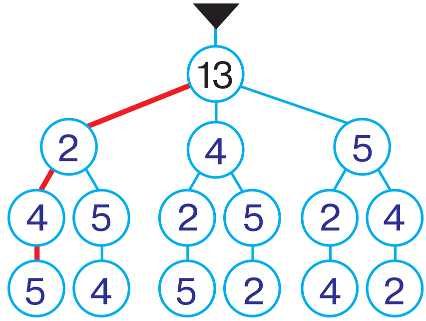
Схема 3



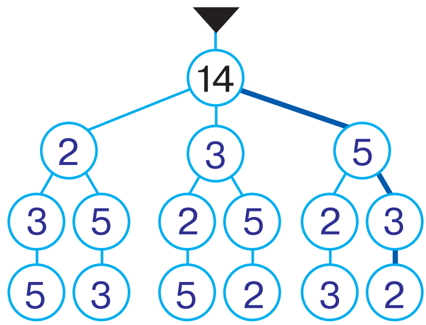
Получилось 6 различных пятизначных чисел.

В п. 4 дети обводят красным цветом веточки с числами, удовлетворяющими условию задания, и читают их.

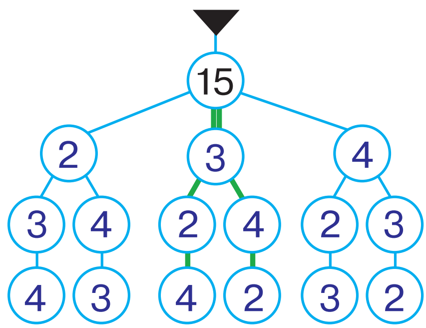
а) 13 245



б) 14 532



в) 15 324 и 15 342



Справка для учителя. *В задании находится число перестановок из четырёх элементов:* $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Занятие 12. Задание 15. Самостоятельная работа № 1

Цель. Проверить умение использовать различные способы решения комбинаторных задач для проверки полученного ответа.

В каждом пункте ***задания 15*** (2, 3, 5, 6) получается 6 чисел.

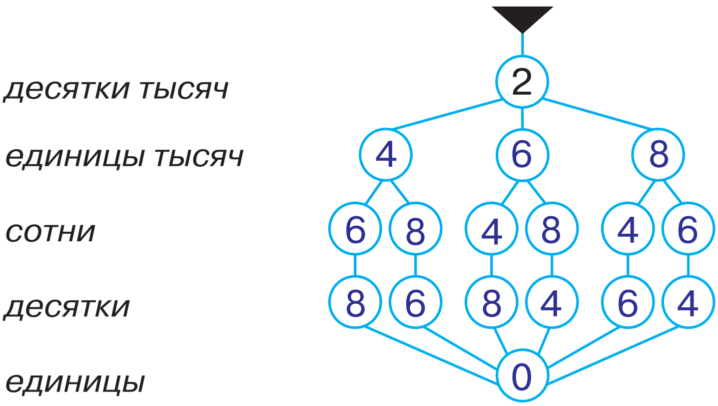
Справка для учителя. *В задании находится число перестановок из трёх элементов:* $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

В п. 2 ребята составляют различные комбинации из трёх цифр (по аналогии с ***заданием 3***), осуществляя их перебор и заполняя цифрами «окошки», каждое из которых соответствует разряду пятизначного числа. Таких комбинаций 6.

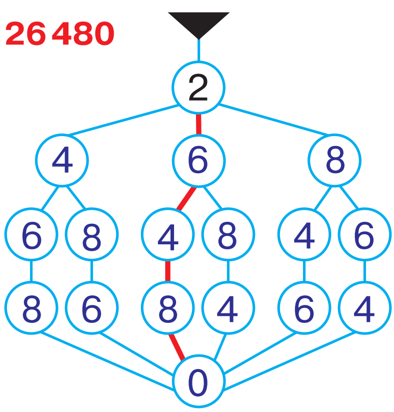
В п. 3 заполнение дерева возможных вариантов является средством проверки ответа, полученного в п. 2. Советуем ориентировать ребят на запись цифр в разряде единиц тысяч в том порядке, в каком эти цифры представлены в условии задания: 4, 6, 8.

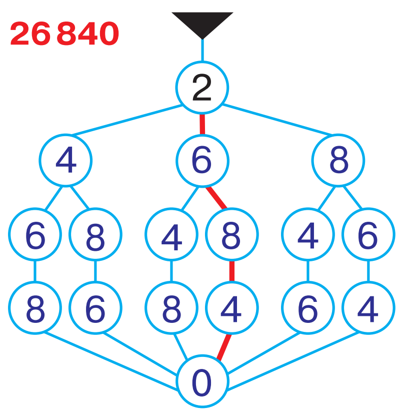
Один из возможных вариантов заполнения схемы 1.

Схема 1



В п. 4 дети анализируют схему 1, выделяя цветом веточки дерева в соответствии с требованием.

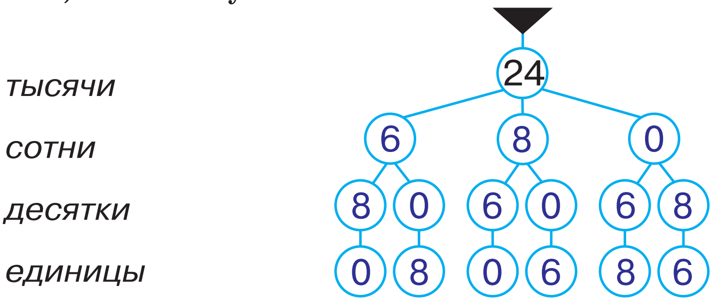




Полезно прочитать получившиеся пятизначные числа: а) 26480, 26840; б) 24860, 28460.

П. 5 – для самостоятельной работы с последующим фронтальным обсуждением. 3 модели пятизначного числа – лишние, это «ловушка».

Схема 2



Деятельность учащихся в п. 6 организуется по аналогии с другими пунктами ***задания 6:*** сначала ребята делают прикидку, потом проверяют свой ответ, заполняя дерево возможных вариантов.

в) 24 068, 24 086, 24 608, 24 680, 24 806, 24 860

Занятие 13. Задание 16

Цель. Совершенствовать умения заполнять таблицу, использовать дерево возможных вариантов для проверки результата. Знакомство с ориентированным графом.

В ***задании 16*** учащиеся знакомятся ещё с одним наглядным способом решения комбинаторных задач – построением *графа*.

Отметим, что подготовительная работа по знакомству с графами проводилась в 1–2 и 3 классах. Так, в первом классе при выполнении ***заданий 43, 46, 47*** ребята находили количество возможных вариантов путём установления соответствия (фактически строили граф с картинками вместо вершин), но при этом термин «граф» не использовался. В 3 классе эта работа продолжалась в ***заданиях 7, 9, 16***.

Работа с ***заданием 16*** начинается с заполнения таблицы, которая отличается от таблиц в предыдущих заданиях. Советуем поинтересоваться:

– Что нового в этой таблице? (Между буквами стоит стрелочка; строки и столбцы имеют разные названия и назначения.)

– Что обозначает стрелка в первом столбце? (Миша отправил открытки Коле, Серёже и Пете.)

После обсуждения ответов на эти вопросы дети продолжат заполнение таблицы самостоятельно. Заполненную таблицу желательно вынести на доску и коллективно ответить на вопросы п. 3, показывая ответы в таблице.

От кого / Кому	М	К	С	П
М				
К	М → К			
С	М → С			
П	М → П			

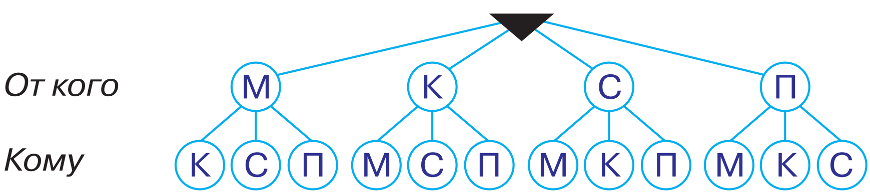
Учитель может предложить различные задания по анализу таблицы. Например:

– Покажи в таблице клетки, соответствующие открыткам, которые написал Петя, получил Серёжа.

– Покажи клетку таблицы, соответствующую открытке, которую Коля написал Мише, и т. д.

П. 5 можно предложить ребятам выполнить самостоятельно, а потом проверить фронтально. Вариантов заполнения дерева очень много, ведь только первую строку «От кого» можно заполнить 24 различными способами (перестановки из четырёх элементов $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$). Поэтому проверку лучше осуществить по вариантам, а некоторые из них вынести на доску для совместного обсуждения.

Один из правильных вариантов:

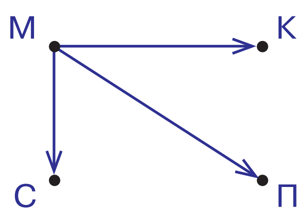


Получилось 12 открыток.

Справка для учителя. *Задача решается по правилу произведения 4 · 3 = 12 (каждый из четырёх мальчиков подписывает по три открытки). Всего нужно 12 открыток.*

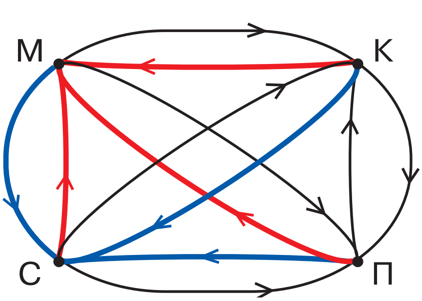
Знакомство с графом советуем начать с его построения. Ребята закрывают тетради, каждый получает по листу бумаги и отмечает простым карандашом 4 точки, которые обозначает буквами М, К, С, П (условные обозначения имён мальчиков).

Затем педагог предлагает отметить линией со стрелкой все письма, которые написал Миша (Коля, Серёжа, Петя) своим друзьям.



Важно, чтобы все ребята активно участвовали в этом процессе.

После завершения построения графа ученики открывают тетради на с. 29, читают текст в рамочках, рассматривают и анализируют изображённый граф, а затем приступают к выполнению п. 6.



Ответ: а) Миша получил 3 открытки; б) Серёжа получил 3 открытки.

Подводя итог, педагог обращается к классу:

– Мы решали комбинаторную задачу разными способами: составляли таблицу, строили дерево возможных вариантов и использовали новую схему-граф.

– Какой способ вам понравился больше и почему?

– Верно ли утверждение, что, используя для решения различные модели – граф, таблицу и дерево возможных вариантов, мы получаем одинаковый результат (12 открыток)?

Занятие 14. Задания 17, 18

Цель. Формирование умений читать и строить ориентированный граф, соответствующий данному условию. Использовать комбинаторные умения для работы с заданиями на порядок выполнения действий в выражениях.

Задание пункта 2 можно предложить выполнить ребятам самостоятельно, а после организовать проверку в форме поиска дополнительной информации из графов.

Сначала можно предложить такое задание: «Расскажите по графам, кто кому позвонил». А затем учитель может задать вопросы типа:

– На каком графе меньше всего звонков? (д) 3)

– На каком графе изображена ситуация, в которой Юля дважды отвечала на звонки подруг, а сама не сделала ни одного звонка? (в)

– На каком графе можно заметить, что Таня поговорила 4 раза по телефону? (е)

– На каком графе показано, что все девочки поговорили друг с другом ровно по одному разу? (д)

– На каком графе видно, что Таня два раза отвечала на звонки, но сама никому не звонила? (г)

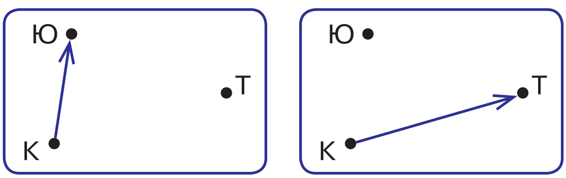
Важно научить детей читать графы, то есть рассказывать о том, кто кому позвонил. Обычно ученики легко овладевают этим умением и справляются с чтением графов без помощи учителя. Задача построения различных вариантов графов оказывается для детей более сложной.

Поэтому самостоятельно справиться с п. 3 могут не все учащиеся. В этом случае советуем сначала рассмотреть все варианты звонков двух девочек, а потом добавить к ним все варианты звонков третьей девочки.

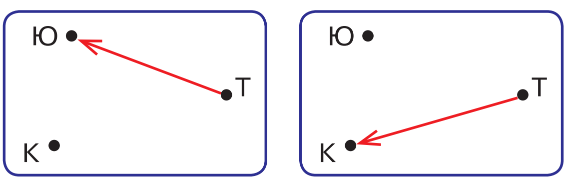
Такое последовательное рассмотрение всех возможных вариантов звонков поможет не только не потерять решений, но и познакомит детей с принципом постепенного увеличения количества комбинаций при системном переборе. Ученики могут выбрать любых двух девочек (например, Катю и Таню), самостоятельно ответить на вопросы: «Кому могла сделать один звонок Катя? Кому – Таня?» – и построить соответствующие графы.

Например:

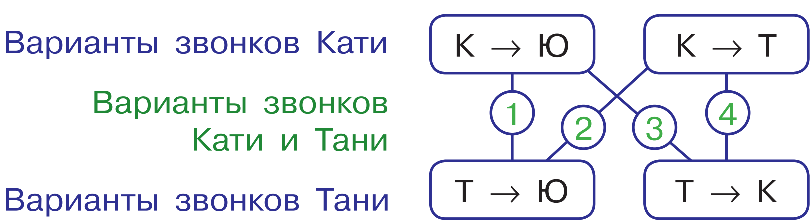
1. Кому могла позвонить Катя? К → Ю или К → Т

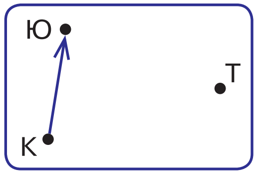
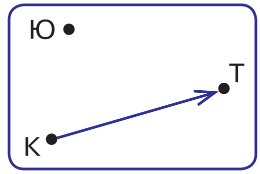
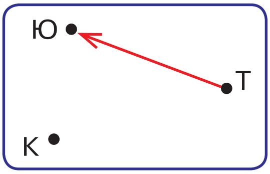
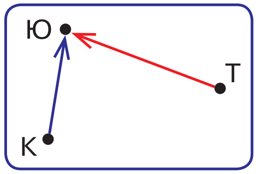
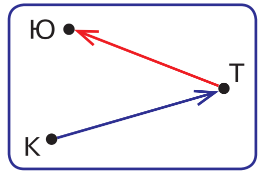
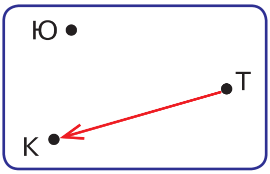
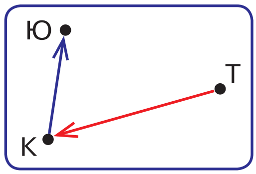
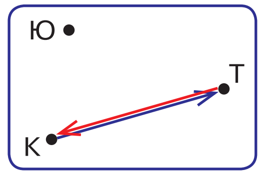


2. Кому могла позвонить Таня? Т → Ю или Т → К



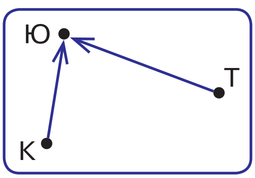
3. Сколько всего комбинаций названных вариантов? (4: у Кати 2 варианта, у Тани 2 варианта, всего 2 · 2 = 4 варианта.) Комбинацию всех вариантов звонков Кати и Тани можно наглядно представить в виде таблицы или схемы.



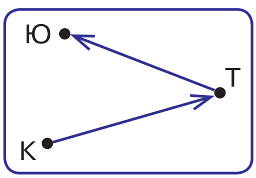
Варианты звонков Кати / Варианты звонков Тани		
		
		

Каждому варианту из схемы соответствует свой граф:

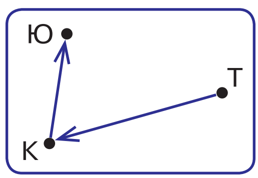
1



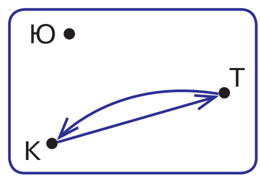
2



3

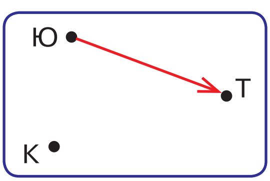


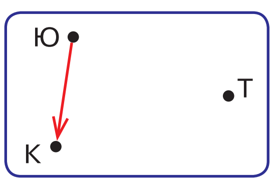
4



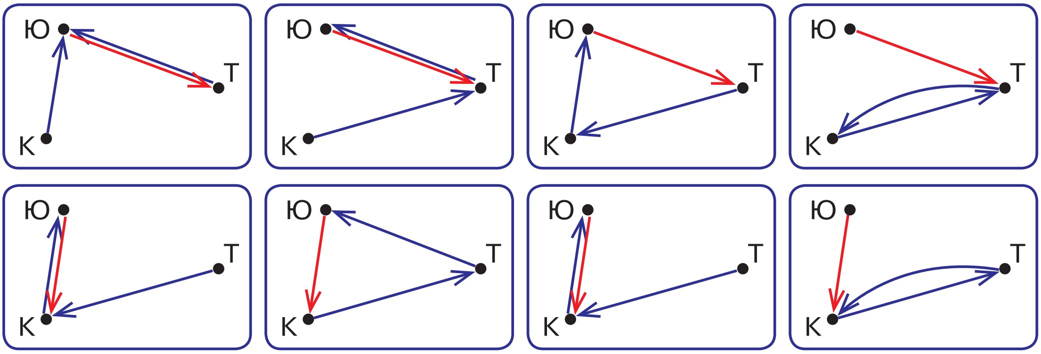
Когда все 4 варианта звонков Кати и Тани будут найдены, можно будет перейти к следующему этапу и выяснить:

4. Сколько вариантов у Юли сделать один звонок?
Два: Ю → К или Ю → Т.





5. А затем добавить к вариантам из пункта 3 сначала вариант Ю → Т, а затем Ю → К.



Ответ: возможны 8 вариантов звонков ($4 \cdot 2 = 8$).

Такое последовательное рассмотрение всех возможных вариантов звонков поможет не только не потерять решений, но и познакомит со способами рассуждений при поиске вариантов системным перебором.

Задание 18 – для самостоятельной работы с последующим коллективным обсуждением. Для проверки советуем вынести на доску различные варианты расстановки знаков арифметических действий.

Ответы:

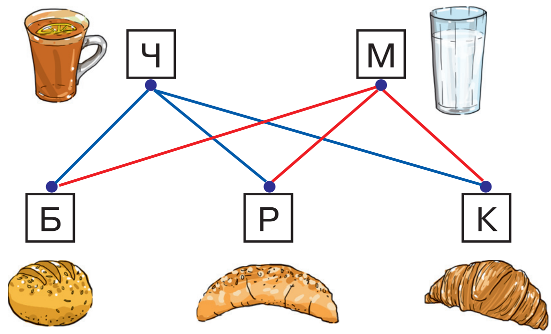
а) $3 \cdot 3 + 3 : 3 = 10$;
б) $333 : 3 = 111$;
в) $(3 \cdot 3 + 3) : 3 = 4$;
г) $3 + 3 - 3 : 3 = 5$;
д) $3 + 3 + 3 : 3 = 7$;
е) $66 : 6 + 6 = 17$;
ж) $3 \cdot 3 - 3 : 3 = 8$;
з) $3 \cdot 3 \cdot 3 : 3 = 9$;
и) $3 \cdot 3 - 3 - 3 = 3$;
к) $3 + 3 + 3 - 3 = 6$;
л) $33 : 33 = 1$;
м) $(6 + 6) : 6 + 6 = 8$.

Ученики могут предложить и другие варианты расстановки знаков арифметических действий, которые следует обсудить и проверить.

Занятие 15. Задание 19

Цель. Совершенствование умений строить граф и использовать дерево возможных вариантов для проверки. Формирование умения выбирать граф, соответствующий данному условию.

В п. 2 ***задания 19*** ребята самостоятельно строят граф, в котором вместо вершин – изображения предметов. Советуем все варианты полдников, включающих чай, соединить одним цветом (например, синим), а варианты полдников с молоком соединить красным цветом.



Получилось 6 вариантов полдников.

В п. 3 ребята осуществляют проверку, заполняя обе схемы дерева возможных вариантов. Можно предложить выполнить эту работу по вариантам, а затем сверить результаты.

Один из возможных вариантов заполнения схем.

Схема 1

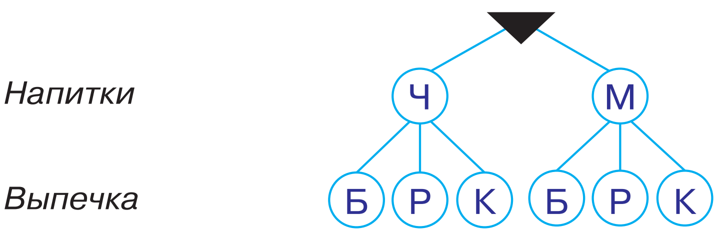
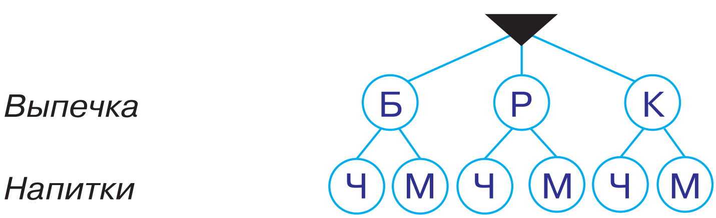


Схема 2



Желательно продолжить работу со схемами: 1) выяснить, чем они похожи и чем отличаются; 2) показать на каждой такие варианты полдников: Ч – Б, М – Р, К – М, Б – М и т. д.

При выполнении ***задания 19*** учащиеся использовали построение графа и дерева возможных вариантов. Важно обратить внимание детей на то, что:

1) используя различные способы, они получили один и тот же ответ;

2) при построении графа, соответствующего данной задаче, можно не ставить стрелки (неориентированный граф).

В п. 4 условие меняется (добавляется ещё один напиток). Рекомендуем дать учащимся время на самостоятельный выбор графа, который соответствует данному условию (граф 2), и не торопить их с ответом, так как соотнесение вербальной и схематической моделей требует анализа текста, понимания ситуации, выделения данных и отношений между ними и т. д.

Для анализа ответов советуем обратиться к рисункам и выяснить, что обозначает одна линия на каждом графе (это полдник).

– Сколько показано полдников на графе 1? (6)

– Все ли данные на графе 1 учтены? (Нет, не все.)

– Как можно переформулировать условие пункта а), чтобы граф 1 ему соответствовал? (Полдник можно составить из трёх напитков и трёх видов выпечки так, что к каждому напитку можно выбрать только одну выпечку из двух.)

Ответ: получится 9 вариантов различных полдников.

Справка для учителя. *Задача решается по правилу произведения* $2 \cdot 3 = 6$ *или* $3 \cdot 3 = 9$.

Занятие 16. Задания 20, 21

Цель. Использовать комбинаторные умения для выполнения заданий на порядок действий в выражениях.

Сначала можно предложить ребятам выполнить задание самостоятельно, а потом перейти к фронтальному обсуждению. Наверняка у ребят получатся разные варианты. Хорошо бы вынести их на доску, включая неправильные. Предложите оценить каждый вариант решения, найти верные и неверные, а затем предложите найти ещё варианты. Работать удобнее по каждому заданию отдельно. Из одного варианта решения можно получить новые путём перестановок слагаемых, множителей, действий или их адекватной замены. Рассмотрим такую работу на примере задания из пункта е).

Предположим, что ребята нашли такой вариант решения:

е) $(9 - 9) \cdot 9 + 9 = 9$.

Используя переместительное свойство умножения и сложения, можно получить ещё несколько вариантов:

$9 \cdot (9 - 9) + 9 = 9$,
$9 + (9 - 9) \cdot 9 = 9$,
$9 + 9 \cdot (9 - 9) = 9$.

Заменив умножение на деление, получаем:

$9 : (9 - 9) + 9 = 9$ или $9 + (9 - 9) : 9 = 9$.

Важно обратить внимание детей на то, почему с делением получилось не 4 варианта, а только 2. Почему не во всех четырёх найденных вариантах можно заменить умножение делением (ноль можно разделить на число 9, а на ноль делить нельзя).

Можно сложение заменить вычитанием:

$9 - (9 - 9) \cdot 9 = 9$,
$9 - 9 \cdot (9 - 9) = 9$.

А ещё возможна комбинация вычитания и деления:

$9 - (9 - 9) : 9 = 9$.

И опять проанализируйте ситуацию. Почему не во всех вариантах можно сделать замену?

Такая работа будет способствовать развитию не только комбинаторных умений, но и формированию обобщённого взгляда на арифметические действия в целом.

Один из вариантов ответов:

а) $(99 - 9) : 9 = 10$;
б) $(9 + 9) : 9 + 9 = 11$;
в) $99 : 9 + 9 = 20$;
г) $99 : 99 = 1$, или $9 + 9 : 9 - 9 = 1$, или $(9 : 9) \cdot (9 : 9) = 1$;
д) $99 : 9 - 9 = 2$;
е) $(9 - 9) \cdot 9 + 9 = 9$.

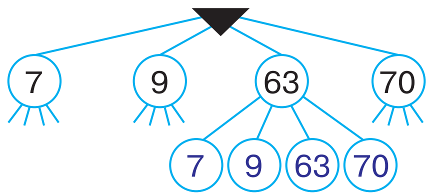
Задание 21 нацелено на формирование умения читать и строить граф. Правило в рамочке (относительно расположения на графе стрелочки вокруг числа) относится ко всем четырём арифметическим действиям. Данному условию соответствует граф 2, на нём изображено **16** стрелочек. Это означает, что возможно составить **16** сумм из двух слагаемых, которые можно выбрать из четырёх данных чисел, включая каждое число.

Проверку ребята выполняют в п. 3 на основе построения дерева возможных вариантов.

Один из возможных вариантов заполнения схемы.

1-е слагаемое

2-е слагаемое



В п. 4 учащиеся действуют по аналогии, а затем в п. 5 записывают ответ на вопрос задачи.

Ответ: возможно составить 16 сумм из двух слагаемых.

Справка для учителя. *В задании находится число размещений с повторениями из четырёх элементов по два:* $\overline{A}_4^2 = 4^2 = 16$.

Занятие 17. Задания 22, 23

Цель. Учиться выбирать граф, соответствующий данному условию.

В ***задании 22*** учащиеся используют комбинаторные умения для работы с заданиями на порядок выполнения действий в выражениях.

Организация деятельности младших школьников аналогична деятельности, описанной в ***задании 20***.

Варианты ответов:

а) $(77 + 7) : 7 = 12$;
б) $(77 - 7) : 7 = 10$;
в) $7 : 7 \cdot 7 \cdot 7 = 49$;
г) $(7 + 7) : 7 + 7 = 9$;
д) $11 + 1 : 1 = 12$;
е) $11 + 11 = 22$;
ж) $4 \cdot 4 - 4 - 4 = 8$;
з) $6 + 6 + 6 : 6 = 13$.

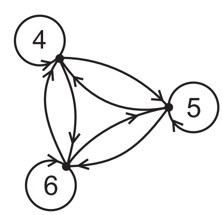
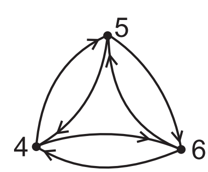
Возможны и другие варианты записи верных числовых равенств. Рекомендуем дать возможность высказаться каждому желающему, выслушать его предложение по расстановке знаков арифметических действий. Все остальные ученики в этом случае выступают в роли экспертов.

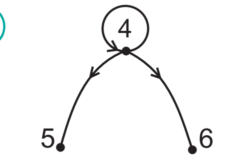
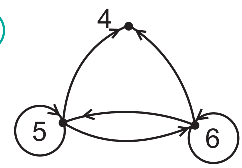
Задание 23 нацелено на совершенствование умений работать с нумерацией двузначных чисел и выбирать граф, соответствующий данному условию.

Информация для учителя. *В п. 5* ***задания 23*** *(издание тетради 2015 года) в изображении графа а – опечатка: лишняя стрелочка на линии от пяти к четырём. Правильный вариант графа а – в таблице.*

Сначала ребята запишут все возможные двузначные числа в соответствии с требованием задания, а потом, ориентируясь на полученный результат, выберут граф и составят пары «граф – задание».

Рекомендуем напомнить ученикам, что в каждом из данных графов линия со стрелочкой вокруг цифры обозначает двузначное число, в записи которого используется одна и та же цифра (55, 44, 66), а стрелочка на любой другой линии в графе идёт от цифры в разряде десятков к цифре в разряде единиц.

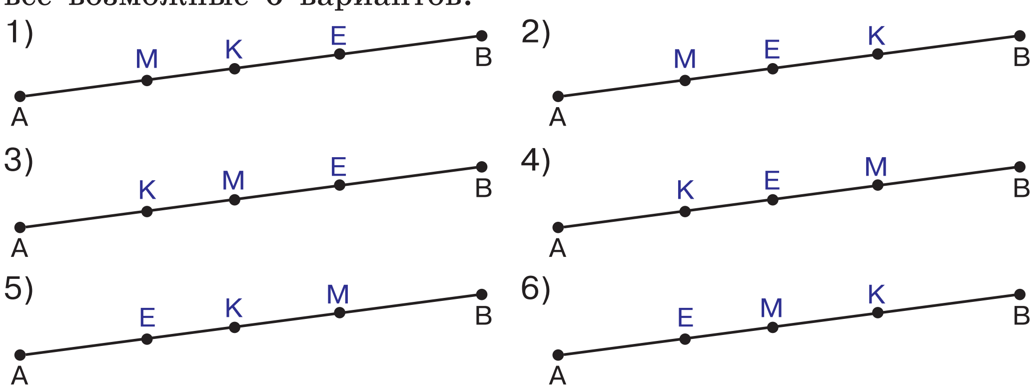
Задание	Ответ	Граф
1. Используя цифры 4, 5, 6, запиши все возможные двузначные числа, в которых цифры могут повторяться.	44, 45, 46 54, 55, 56 64, 65, 66	а 
2. Используя цифры 4, 5, 6, запиши только те двузначные числа, в которых цифры не повторяются.	45, 46, 54, 56, 64, 65	г 

3. Используя цифры 4, 5, 6, запиши двузначные числа, которые меньше пятидесяти и цифры в них могут повторяться.	44, 45, 46	*б* 
4. Используя цифры 4, 5, 6, запиши двузначные числа, которые больше пятидесяти и цифры в них могут повторяться.	54, 55, 56, 64, 65, 66	*в* 

Занятие 18. Задания 24, 25

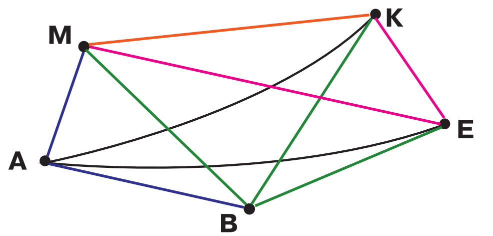
Цель. Учиться строить граф и завершать его построение в соответствии с данным условием.

Задание 24. На отрезке АВ отметить точки М, К, Е можно по-разному. Поэтому советуем предложить ребятам сначала выполнить это задание самостоятельно, а потом обсудить фронтально различные варианты. Так как мы учимся решать комбинаторные задачи, то очень важно обобщить, сколько всего возможно вариантов отметить точки М, К, Е на отрезке АВ. Подводя итог первого задания, советуем изобразить на доске все возможные 6 вариантов:



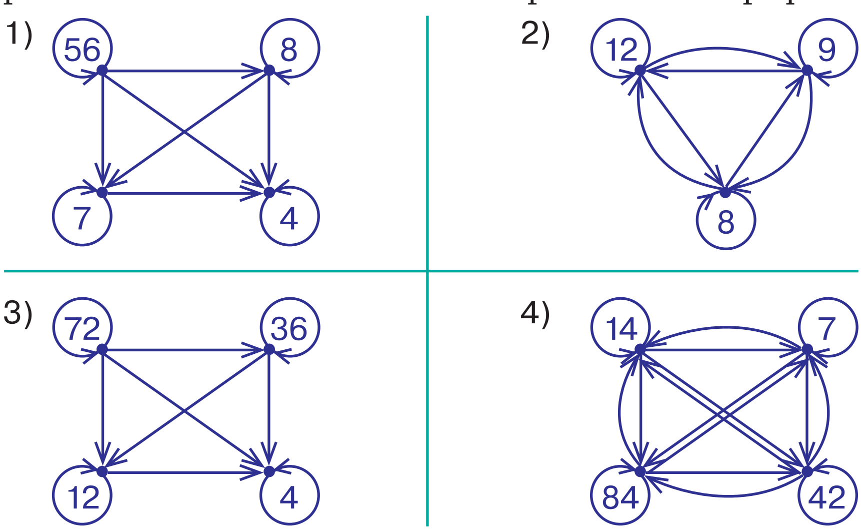
Рассмотрев все возможные варианты расположения трёх точек М, К и Е на отрезке АВ, ребята приходят к выводу, что количество полученных отрезков не зависит от расположения точек и во всех случаях равно 10. Для получения этого вывода можно разбить класс на 6 групп и каждой группе предложить найти количество отрезков для своего рисунка. А затем сверить полученные отрезки: АВ, АЕ, АК, АМ, ВЕ, ВК, ВМ, ЕК, ЕМ, КМ.

Граф к рисунку 1 дети заканчивают в п. 2, а к другим рисункам строят графы на доске индивидуально или в группах. В результате проделанной работы делается вывод: имеем 6 одинаковых графов.



После такого подробного анализа дети сами смогут выполнить пункт 3. Конечно, объяснения можно сформулировать по-разному. Дети под руководством учителя корректируют каждую формулировку и учатся излагать свои мысли.

Задание 25 – для самостоятельной работы. Важно, чтобы ребята понимали назначение стрелочки на графе.



Занятие 19. Задание 26

Цель. Учиться читать, анализировать и использовать граф, отвечая на различные вопросы.

Начиная работу с ***заданием 26***, советуем уточнить назначение стрелки (она показывает девочку, которая принимала гостей).

Далее дети приступают к самостоятельной работе в тетради, в ходе которой они анализируют схему-граф, выделяя информацию, необходимую для ответа на вопросы.

Ответы: а) Ира; б) Рая и Маша; в) таких девочек нет; г) у Тани; д) Машу и Иру; е) с Раей, Машей, Катей и Ниной; ж) у Маши и Иры.

Для организации коллективного обсуждения советуем граф вынести на доску. Во время проверки ответов ученики обводят цветным мелом стрелочки, соответствующие данному вопросу. Класс наблюдает за работой, сверяя результаты на доске со своими и корректируя их по мере необходимости. Возможны и дополнительные вопросы к данному графу. Их может задать учитель или дети.

Например:

– Сколько визитов сделала Рая и к кому она ходила в гости? (4: к Кате, к Маше, к Тане и Нине.)

– Кто приходил в гости к Ире? (Катя и Нина.)

– Кто был в гостях у Маши? (Ира, Нина, Катя, Рая.)

– Кто из девочек не ходил в гости? (Таня.)

– Верно ли утверждение, что у Нины в гостях была только Рая? (Да.)

– Верно ли утверждение, что у Маши в гостях были только Рая и Катя? (Нет, к Маше приходили и другие девочки.)

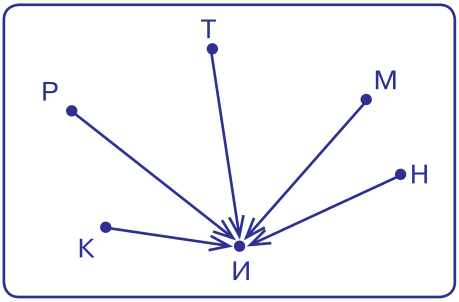
Важно, чтобы дополнительные вопросы не дублировали вопросы в тетради, на которые дети уже ответили.

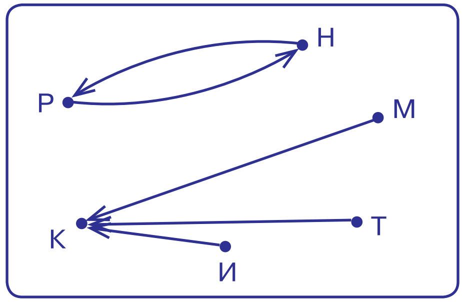
Возможно продолжить работу с заданием и предложить ученикам работу в группах. Каждая группа получает задание нарисовать граф, который показывает:

1) к Ире пришли в гости все девочки;

2) Рая и Нина были в гостях друг у друга, а остальные девочки встретились у Кати.

Желательно рассмотреть все получившиеся варианты. Приведём некоторые из них:





Занятие 20. Задания 27, 28

Цель. Учиться достраивать граф в соответствии с условием задачи. Использовать комбинаторные умения для работы с заданиями на порядок выполнения действий в выражениях.

Задание 27. В тексте задачи говорится о том, что пятеро ребят обменялись рукопожатиями, то есть каждый из них пожал руку каждому.

Чтобы закончить построение графа в п. 2, ученик должен представить себе этот граф, а именно: каждому из пяти друзей соответствует определённая точка, обозначенная одной из пяти цифр, а выполненному рукопожатию – линия (ребро графа), соединяющая соответствующие точки (вершины). Мнение ребят по поводу стрелок может быть таким:

– Если два мальчика, например второй и пятый, пожали друг другу руки, это одно рукопожатие, но в нём участвуют оба. Поэтому стрелочка здесь не нужна.

В построенном графе будет ровно 10 рёбер, которые и соответствуют десяти рукопожатиям.

Задачу о рукопожатиях можно решить, исходя из таких соображений: встретились пятеро друзей, и каждый пожал руку четверым, но ведь если один пожал руку другому, то и другой пожал руку первому, то есть число рукопожатий равно:

$5 \cdot 4 : 2 = 10.$

Дети достраивают графы в п. 2, используя разноцветные карандаши: для каждого мальчика выбирают свой цвет. Важно учитывать уже имеющуюся информацию на графах, на которых показано, что со всеми четырьмя друзьями поздоровался: а) мальчик 2; б) мальчик 1; в) мальчик 4; г) мальчик 5. Советуем не использовать линейку при построении графов, все линии лучше провести от руки.

Ответ: всего было сделано 10 рукопожатий.

Желательно обсудить результаты самостоятельной работы и сделать вывод о числе рукопожатий. Важно, чтобы учащиеся понимали, что ответ в каждом случае будет одинаковым, а количество вариантов перебора не ограничивается пятью представленными, их гораздо больше.

Справка для учителя. *В задании находится число сочетаний из пяти по два:* $C_5^2 = \dfrac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$.

В п. 3 для проверки полученного результата предлагается использовать системный перебор, поэтому «окошки» рекомендуем заполнить либо по возрастанию, либо по убыванию:

1 2	2 3	3 4	4 5		5 4	4 3	3 2	2 1
1 3	2 4	3 5			5 3	4 2	3 1	
1 4	2 5				5 2	4 1		
1 5					5 1			

Ответ: 10 рукопожатий.

Завершая работу с ***заданием 27***, можно «оживить» ситуацию и пригласить к доске пятерых учеников. Один из них пожимает остальным руки (на доске записываем число произведённых рукопожатий – 4) и возвращается на своё место. У доски остаются четверо. Один из них, скажем Петя, пожимает руки всем другим у доски и идёт к своему месту. На доске фиксируем – 3. Класс наблюдает за происходящим. Советуем уточнить, всем ли Петя пожал руки или только трём ребятам. Отвечать может Петя или кто-нибудь из класса.

Ответ: всем, ведь самый первый пожал ему руку ещё раньше. У доски осталось трое ребят. И т. д.

Тот, кто останется у доски в одиночестве (самый последний), не будет пожимать руку никому, так как все уже пожали ему руку и ушли. На доске уже записано: 4, 3, 2, 1. Сложив эти числа, получаем общее число рукопожатий – 10.

Задание 28 – для самостоятельной работы с последующим коллективным обсуждением.

Ответы:

а) $(40 \overset{1}{-} 24) \overset{2}{:} 16 \overset{3}{\cdot} 4 = 4$;

б) $40 \overset{3}{-} (24 \overset{1}{+} 16) \overset{2}{:} 4 = 30$;

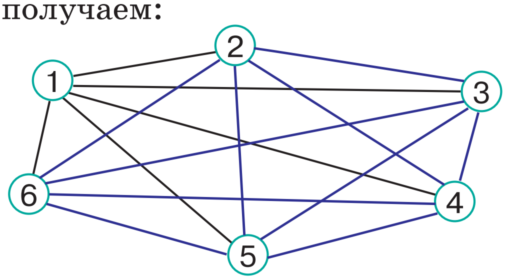
в) $(40 \overset{1}{-} 24 \overset{2}{+} 16) \overset{3}{:} 4 = 8$;

г) $40 \overset{3}{-} (24 \overset{2}{+} 16 \overset{1}{:} 4) = 12$.

Занятие 21. Задания 29, 30

Цель. Учиться строить граф, соответствующий комбинаторной задаче, и использовать граф с целью проверки.

В ***задании 29***, п. 2, дети самостоятельно заканчивают построение графа. Для проверки учитель выносит на доску заготовку для графа, изображённую в тетради. После заполнения его учащимися получаем:

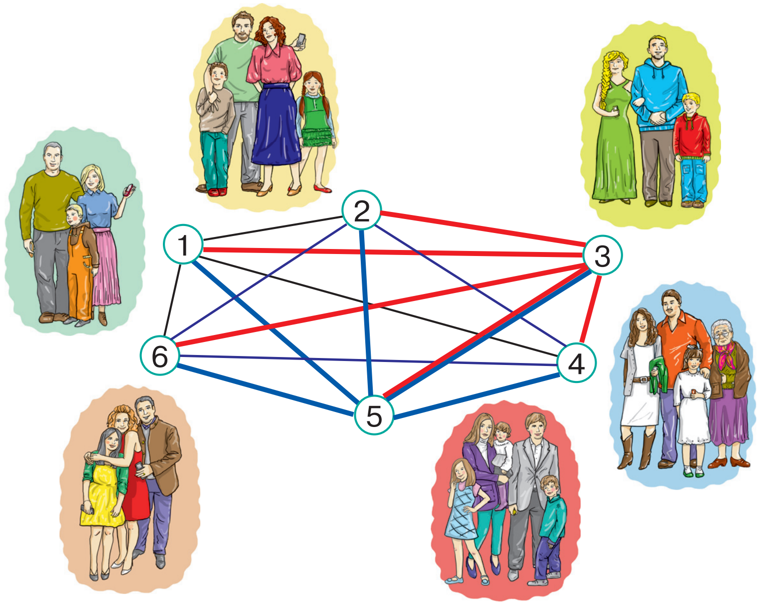


Вопросы п. 3 и 4 – для обсуждения в парах с последующим фронтальным обсуждением и показом на графе (с. 124 данного пособия): а) 5; б) 5; в) 5.

Ответ: состоялось 15 телефонных разговоров.

После самостоятельного выполнения п. 5 и записи ответа в п. 6 советуем обратиться к классу с вопросом:

– Почему общее количество звонков не 30, а 15, ведь у шести семей было по 5 звонков?



Этот вопрос вызывает недоумение у ребят. Педагог предлагает обратиться к графу и разобраться в ситуации. Можно обсудить следующие вопросы:

– Сколько семей показано на графе? (6)

– Сколько от каждой семьи идёт линий? (По 5.)

– Сколько таких линий на графе? (15)

– Почему не 30, ведь $5 \cdot 6 = 30$?

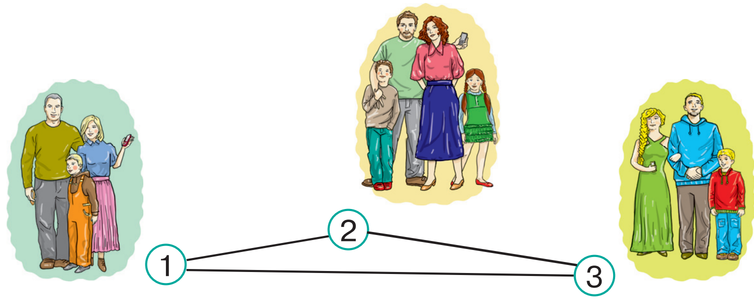
Важно, чтобы ребята заметили, что каждый разговор проходил между двумя семьями и в нём участвовали обе семьи. И если находить общее количество телефонных разговоров, умножая 5 на 6, мы получим 30. Это в два раза больше реальных разговоров, потому что в этом случае каждый разговор учитывается дважды.

– Тогда какие действия нужно выполнить, чтобы найти реальное количество разговоров? ($6 \cdot 5 : 2 = 15$)

Полученный вывод можно проверить и для других случаев.

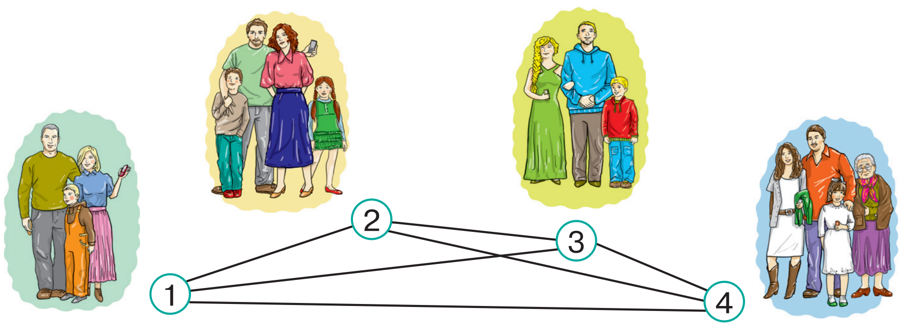
– Представим, что каждая пара из трёх семей поговорила друг с другом. Сколько всего разговоров состоялось?

Можно сначала нарисовать граф, а затем выполнить вычисления:



$3 \cdot 2 = 6$ и делим на 2 ($6 : 2 = 3$).

– Если каждая пара из четырёх семей поговорила друг с другом, сколько всего разговоров было? Опять нарисуем граф и посчитаем:



$4 \cdot 3 = 12$ и делим на 2 ($12 : 2 = 6$).

Затем учащиеся выполняют п. 7, проверяя полученный ответ с помощью системного перебора.

Один из возможных вариантов выполнения системного перебора.

1 2	2 3	3 4	4 5	5 6
1 3	2 4	3 5	4 6	
1 4	2 5	3 6		
1 5	2 6			
1 6				

Ответ: получилось 15 телефонных разговоров.

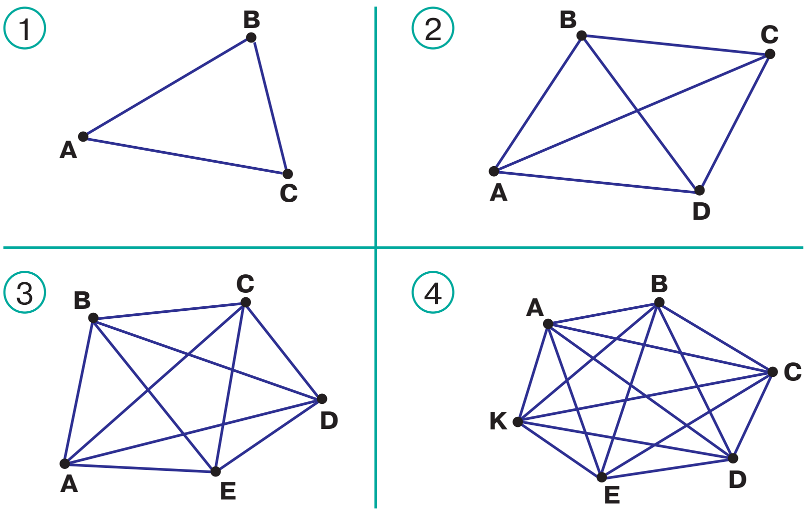
Справка для учителя. *В задании находится число сочетаний из шести по два:* $C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$.

Задание 30.

Ответы:

1) 3 отрезка; 2) 6 отрезков; 3) 10 отрезков; 4) 15 отрезков.

Отметим, что для построения графа не нужна линейка. Все линии можно проводить от руки: это и удобнее, и быстрее. Обсуждая полученные графы, ученики поясняют: в них не нужно ставить стрелки, так как каждая линия показывает отрезок, в названии которого используются две буквы, обозначающие его концы.



Справка для учителя. *В задании находится число сочетаний:*

1) из трёх по два: $C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$;

2) из четырёх по два: $C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$;

3) из пяти по два: $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$;

4) из шести по два: $C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$.

Занятие 22. Задания 31, 32

Цель. Учиться использовать граф для проверки утверждений и выбирать граф, соответствующий задаче.

При выполнении ***задания 31***, п. 1, можно предложить ребятам сначала составить в обычной тетради требуемые суммы, разности, произведения и частные, а затем найти их количество.

Например:

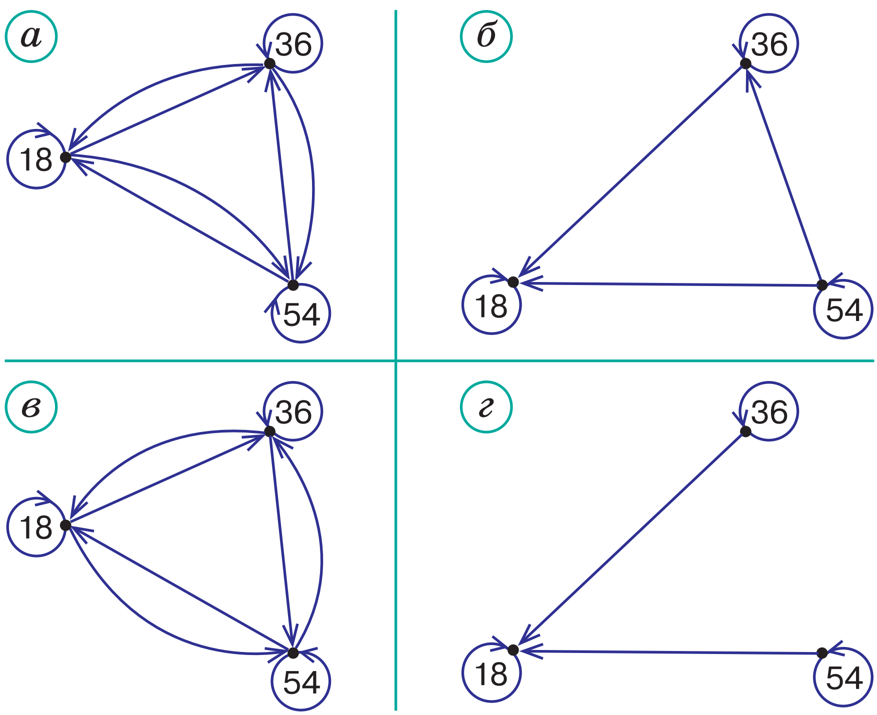
а) 18 + 18, 18 + 36, 18 + 54, 36 + 18, 36 + 36, 36 + 54, 54 + 18, 54 + 36, 54 + 54; (Всего 9)

б) 18 – 18, 36 – 18, 36 – 36, 54 – 18, 54 – 36, 54 – 54; (Всего 6)

в) 18 · 18, 18 · 36, 18 · 54, 36 · 18, 36 · 36, 36 · 54, 54 · 18, 54 · 36, 54 · 54; (Всего 9)

г) 18 : 18, 36 : 18, 36 : 36, 54 : 18, 54 : 54. (Всего 5)

А затем перейти к самостоятельному выполнению п. 2.



Когда ребята составят графы, советуем вынести их для проверки на доску и предложить провести сравнение составленных выражений (они были записаны в обычных тетрадях) и графов. Важно, чтобы ребята могли показать на графе, какие выражения обозначены какими стрелками и наоборот.

Рекомендуем сравнить полученные графы:

– Почему графы а) и в) одинаковые?

– Чем отличаются графы б) и г) ?

Задание 32 – для самостоятельной работы с последующим обсуждением её результатов.

Ответ в п. 1: 12 писем.

Ответ в п. 2 а): граф *б*.

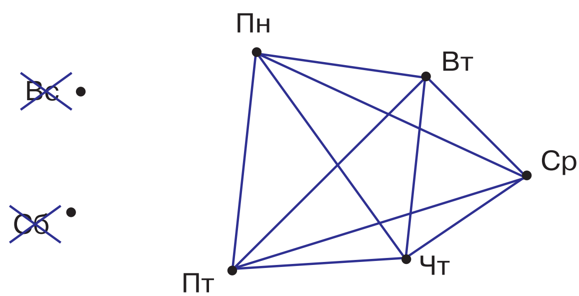
Ответ в п. 2 б): *а* 6; *б* 12; *в* 8; *г* 8; *д* 9; *е* 11.

Занятие 23. Задание 33. Самостоятельная работа № 2

Цель. Проверить сформированность умений строить граф и пользоваться способом перебора для проверки результата.

Сначала дети читают текст п. 1 ***задания 33***, а затем самостоятельно приступают к построению графа.

Так как в субботу и воскресенье музыкальная школа закрыта, значит, эти дни в построении графа учащиеся не учитывают. В соответствии с условием в графе должно быть 5 вершин: Пн, Вт, Ср, Чт, Пт.



Ответ: 10 вариантов выбора двух дней для занятий получается.

Справка для учителя. *В задании находится число сочетаний из пяти по два:* $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10.$

В п. 3 способ перебора используется для проверки полученного ответа. Две пары клеток останутся лишними. Это «ловушка».

Проверку самостоятельной работы можно организовать по-разному. Возможны, например, такие варианты:

1. Педагог выносит верно построенный граф на доску, ребята меняются тетрадями и проверяют рисунки друг у друга, ориентируясь на изображение на доске.

2. Педагог выносит на доску рисунок графа, в котором не проведены 2–3 линии. Учащимся нужно найти и исправить ошибку в его построении.

3. После самоконтроля или взаимного контроля учитель собирает тетради и сам оценивает результат с учётом того, как дети справились с заданиями 1) и 2).

Занятие 24. Задание 34

Цель. Совершенствовать умение заполнять таблицу в соответствии с условием, использовать граф с целью проверки и завершать построение графа, соответствующего комбинаторной задаче.

Начиная работу с ***заданием 34,*** советуем поработать со структурой задачи (выделить её условие и вопрос), а затем выяснить, как дети понимают словосочетание «всем покататься на лодке друг с другом». (Каждая из шести девочек покатается с пятью своими подругами.)

При заполнении таблицы полезно выяснить, почему в некоторых клетках таблицы стоит прочерк. Ответы детей могут быть примерно такими:

– Нельзя составить пару из девочки 1, поэтому стоит прочерк в клетке на пересечении столбца и строки с номером 1.

– Пара девочек 1–2 и 2–1 – это одна и та же пара. Пара 1 и 2 уже указана в таблице, значит, пару 2 и 1 не будем считать.

Учитель обобщает:

– Значит, будем ставить прочерк в тех клетках таблицы, которые не соответствуют условию задачи.

Далее учащиеся приступают к заполнению таблицы, которая в итоге имеет вид:

	1	2	3	4	5	6
1	–	1 и 2	1 и 3	1 и 4	1 и 5	1 и 6
2	–	–	2 и 3	2 и 4	2 и 5	2 и 6
3	–	–	–	3 и 4	3 и 5	3 и 6
4	–	–	–	–	4 и 5	4 и 6
5	–	–	–	–	–	5 и 6
6	–	–	–	–	–	–

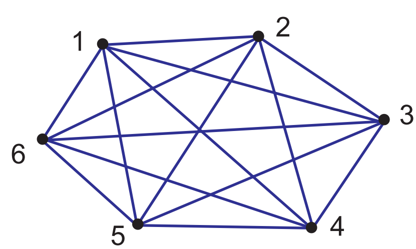
Когда дети закончат работу с таблицей, полезно уточнить:

1. В столбце 4 заполнены 3 клетки. Назовите пары девочек, которые там записаны.
2. Каталась ли в лодке пара девочек 4 и 5?
3. Пара девочек 4 и 6? Поясните, где в таблице это показано.
4. Верно ли утверждение, что пара девочек 5 и 6 не каталась друг с другом в лодке, ведь в столбце 5 заполнено только 4 клетки?
5. Вы видите прочерки в клетках последнего ряда таблицы. Значит ли это, что девочка 6 ни с кем из подруг на лодке не каталась?

Такой диалог поможет детям понять ситуацию задачи и записать верный ответ.

Ответ: получилось 15 пар девочек.

В п. 3 при построении графа стрелки ставить не нужно, так как порядок размещения девочек в паре не важен. Начинать проводить линии в графе можно от любой цифры, то есть от любой девочки.



Желательно использовать цветные карандаши, составляя пары девочек, – так удобнее (нагляднее) подсчитывать линии на графе. Например, карандашом красного цвета соединить девочку 6 с другими девочками в пару, получится 5 красных линий; карандашом синего цвета соединить девочку 5 с другими девочками в пару, получится 4 синие линии и т. д.

Затем ребята подсчитывают число линий на графе, их 15. Ответ такой же, как и в пункте 3.

В п. 4 нужно выполнить вычисления. Каждая пара была в лодке 15 минут, а пар было 15, значит, чтобы покататься друг с другом на лодке, девочкам потребовалось $15 \cdot 15 = 225$ мин; 225 мин = 3 ч 45 мин.

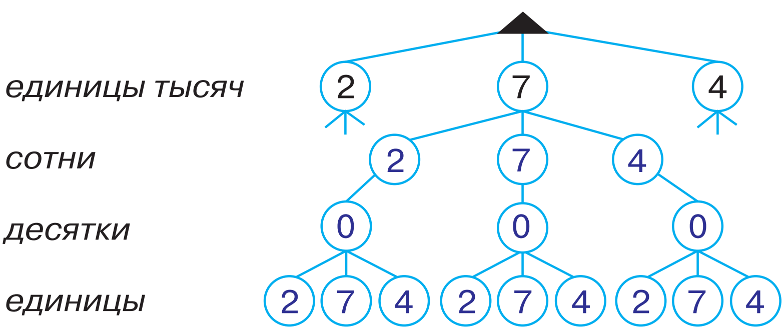
В п. 5 учащиеся завершают построение графа, соответствующего данной задаче. Рекомендуем воспользоваться цветными карандашами.

Занятие 25. Задания 35, 36

Цель. Совершенствовать умение заполнять дерево возможных вариантов, анализировать граф, выделяя необходимую информацию для ответа на вопросы.

Задание 35 и по формулировке, и по способу действия знакомо учащимся. Его можно предложить для самостоятельной работы с последующим обсуждением.

Один из возможных вариантов заполнения схемы.



Для ответа на вопрос задачи нужно суммировать количество чисел, записанных в ответах п. 2 и п. 3.

Ответ: 27 четырёхзначных чисел.

Чтобы проверить этот результат, можно вынести на доску 3 пустых дерева возможных вариантов (таких, как в п. 2) и заполнить их для случаев, когда в разряде единиц тысяч записана или цифра 2, или цифра 4. Третья схема – «ловушка», ведь начинать запись многозначного числа с цифры 0 мы не можем, но схему следует разместить на доске, чтобы услышать рассуждения детей.

В п. 5 дети читают схему и упражняются в нумерации многозначных чисел:

а) 7702, 7704, 7707; б) 7202, 7204, 7207.

Справка для учителя. *В данной задаче находится число размещений с повторениями из трёх по три:* $\overline{A}_3^3 = 3^3 = 27$.

Работа с ***заданием 36*** организуется по аналогии с ***заданием 26***. Стрелка указывает на ученика, которому позвонили.

Занятие 26. Задания 37, 38

Цель. Формирование умений заполнять дерево возможных вариантов, соответствующее задаче, читать граф и строить его в соответствии с данным требованием.

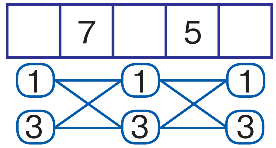
Формулировка ***задания 37*** учащимся знакома, как и способ действия в п. 2. Если в условии речь идёт о том, что «в разряде десятков записана только цифра 5», это значит, что позиция цифры 5 в записи данного числа определена однозначно и ни в каком другом разряде она стоять не может.

После того как учащиеся прочитают текст задания, можно предложить им рассмотреть модель пятизначного числа.

Ребятам нужно вписать цифры 7 и 5, их позиция в записи данного пятизначного числа известна из условия.

	7		5	

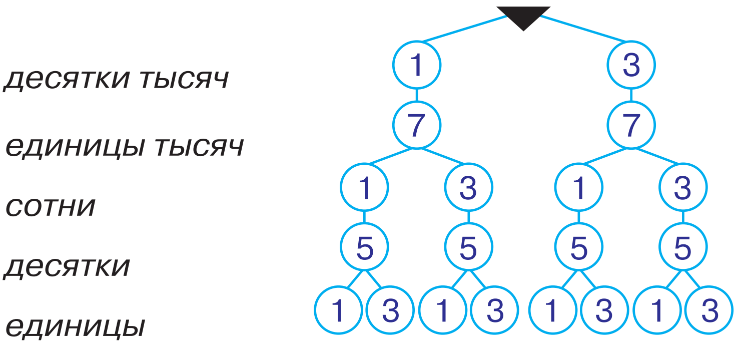
Затем под пустыми «окошками»-разрядами написать цифры, которые могут стоять в каждом разряде, и показать их возможные позиции в записи данного пятизначного числа.



Линиями на модели показаны все возможные комбинации записи цифр 1 и 3 в пустые «окошки».

Далее ребята самостоятельно заполняют дерево возможных вариантов в п. 2.

Один из возможных вариантов заполнения схемы.

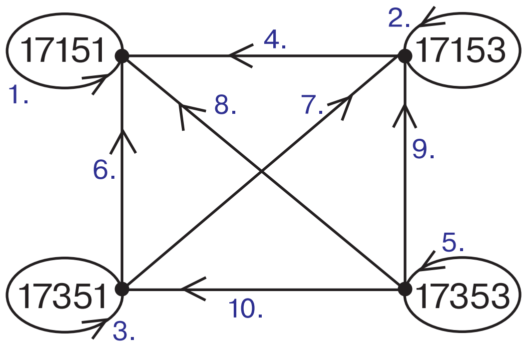


Ответ: получилось 8 пятизначных чисел, удовлетворяющих условию задачи.

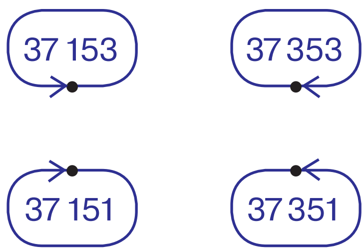
В п. 3 при построении графа следует учесть разности, в которых уменьшаемое равно вычитаемому. Для проверки полученного результата рекомендуем вынести граф на доску и показать на нём все разности, нумеруя их по порядку. Один из учеников читает разность, пользуясь своей тетрадью, второй записывает её на доске, третий показывает и обозначает данную разность на графе.

1) 17 151 – 17 151 = 0
2) 17 153 – 17 153 = 0
3) 17 351 – 17 351 = 0
4) 17 153 – 17 151 = 2
5) 17 353 – 17 353 = 0
6) 17 351 – 17 151 = 200
7) 17 351 – 17 153 = 198

8) 17 353 − 17 151 = 202
9) 17 353 − 17 153 = 200
10) 17 353 − 17 351 = 2



П. 4 учащиеся выполняют самостоятельно. Рекомендуем дать время на работу, чтобы дети могли вспомнить о частных, в которых делимое равно делителю. Один из возможных вариантов графа имеет вид:



При проверке ребята читают частные и называют значение каждого.

Задание 38 выполнятся на основе анализа числовых равенств и с учётом возможной последовательности арифметических действий.

① ② ④ ③
а) (8 + 40) : 8 − 3 · 2 = 0;

④ ③ ② ①
б) 8 + 40 : (8 − 3 · 2) = 28;

④ ② ① ③
в) 8 + 40 : (8 − 3) · 2 = 24.

Занятие 27. Задание 39

Цель. Учиться дополнять текст на основе анализа информации, представленной в схеме.

Выполнение ***задания 39*** начинается со знакомства со схемой и её анализа. После этого учитель предлагает учащимся ответить на вопросы:

– Сколько футбольных команд вышли в финал кубка? (Две.)

– Какие команды вышли в четвертьфинал? (2-я, 3-я, 5-я, 7-я, 9-я, 11-я, 13-я, 16-я.)

– С какой командой встретилась команда 7 в полуфинале? (Со второй.)

– Какие команды обыграла команда-победитель? (7-ю, 16-ю, 9-ю.)

– Сколько матчей сыграла команда 3? (Два.)

– Сколько из них она выиграла? (Один.)

– Какие команды победили в двух матчах, но в одном проиграли? (2-я и 16-я.)

И т. д.

Далее школьники самостоятельно заполняют пропуски в тексте, пользуясь данной схемой.

В 1/8 финала кубка по футболу вышло **16** команд. В 1/4 финала осталось **8** команд. В полуфинале встретились **4** команды: **2 и 7, 11 и 16**. Чтобы выйти в финал, команде нужно победить в **3** играх. За победу в финале боролись команды **7 и 11**. Кубок завоевала команда **11**. Победитель соревнования был участником **4** матчей.

Проверку советуем организовать коллективно, ребята прочитают получившиеся высказывания и обсуждают их.

Далее педагог может предложить классу составить верные высказывания, пользуясь данной схемой.

Краткий справочник по комбинаторике

Комбинаторными в математике называют задачи на определение числа возможных конечных множеств, или кортежей, с определёнными свойствами, которые можно составить из элементов данных множеств. Раздел математики, занимающийся такими задачами, называется ***комбинаторикой***.

В комбинаторике изучаются конечные множества, их подмножества, а также ***кортежи*** (конечные упорядоченные множества), составленные из элементов конечных множеств.

Решение большинства комбинаторных задач основано на двух правилах, которые называются ***правилами суммы и произведения***.

Правило суммы позволяет найти число элементов в объединении двух конечных непересекающихся множеств, а ***правило произведения*** – число элементов их декартова произведения.

Правило суммы. Если объект a можно выбрать m способами, a объект b – k способами (не такими, как a), то выбор либо a, либо b можно осуществить $m + k$ способами.

Например, если на тарелке лежит 5 яблок и 4 апельсина, один фрукт можно выбрать $5 + 4 = 9$ способами.

Правило произведения. Если объект a можно выбрать m способами, а объект b – k способами, то пару (a, b) можно выбрать $m \cdot k$ способами.

Например, если в классе 10 девочек и 12 мальчиков, то пару «мальчик и девочка» можно выбрать $10 \cdot 12 = 120$ способами.

Размещение с повторениями из k элементов по m элементов – это кортеж, составленный из m элементов k-элементного множества.

Число всевозможных размещений с повторениями из k элементов по m элементов находят по формуле $\overline{A}_k^m = k^m$.

Например, если требуется составить из цифр 1, 2 и 3 всевозможные двузначные числа, то есть размещения с повторениями из трёхэлементного множества двухэлементных кортежей, это будет $3^2 = 9$ {11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33}.

Размещение без повторений из $\boldsymbol{k}$ элементов по $\boldsymbol{m}$ элементов – это кортеж, составленный из $\boldsymbol{m}$ неповторяющихся элементов $\boldsymbol{k}$-элементного множества.

Число всевозможных размещений без повторений из $\boldsymbol{k}$ элементов по $\boldsymbol{m}$ элементов находят по формуле:

$$A_k^m = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot (k-m+1) \text{ или } A_k^m = \frac{k!}{(k-m)!}.$$

Например, если требуется составить из цифр 1, 2, 3, 4 и 5 всевозможные двузначные числа, в которых все цифры разные, то есть размещения из пяти элементов по два без повторений, то это будет $5 \cdot 4 = 20$.

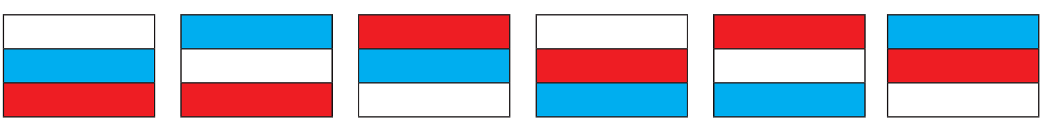
12	21	31	41	51
13	23	32	42	52
14	24	34	43	53
15	25	35	45	54

Размещения из $\boldsymbol{k}$ элементов по $\boldsymbol{k}$ элементов называют ***перестановками*** из $\boldsymbol{k}$ элементов без повторений.

Число перестановок без повторений подсчитывают по формуле $\boldsymbol{P_k = k!}$, где $\boldsymbol{k!}$ читают «$\boldsymbol{k}$ факториал».

Факториалом числа k называется произведение всех натуральных последовательных чисел от $\boldsymbol{1}$ до $\boldsymbol{k}$, а его значение находится по формуле $\boldsymbol{k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}$.

Например, если в задаче речь идёт о том, сколько различных флажков можно составить из полосок белого, синего и красного цветов, то это будет задача на нахождение числа перестановок из трёх элементов $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.



Сочетания без повторений из $\boldsymbol{k}$ элементов по $\boldsymbol{m}$ элементов – это $\boldsymbol{m}$-элементное подмножество множества, содержащего $\boldsymbol{k}$ элементов.

Два сочетания из $\boldsymbol{k}$ элементов по $\boldsymbol{m}$ элементов отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Число всевозможных сочетаний без повторений из $\boldsymbol{k}$ элементов по $\boldsymbol{m}$ элементов находят по формуле:

$$C_k^m = \frac{A_k^m}{m!} = \frac{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-m+1)}{m!} \text{ или } C_k^m = \frac{k!}{(k-m)! \cdot m!}.$$

Например, если требуется узнать, сколькими способами можно выбрать из данных букв {а, б, в, г, д, е} любые 3 буквы, то это задача на нахождение числа сочетаний без повторений из шести элементов по три, которая решается по формуле:

$$C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20.$$

Вместо заключения

Уважаемые учителя!

Надеемся, что данное пособие поможет вам организовать деятельность младших школьников, направленную на освоение основных способов решения комбинаторных задач.

Приглашаем вас к обмену мнениями в клубе «Гармония» на сайте издательства «Ассоциация XXI век» (www.garmoniya-club.ru).

Успехов вам в вашей работе и всего доброго!

Авторы

Литература

1. Болотов В. А. О введении элементов комбинаторики, статистики и теории вероятностей в содержание математического образования основной школы // Математика. – 2004. – № 44. – С. 45–47.
2. Бунимович Е. А., Булычёв В. А. Вероятность и статистика в курсе математики общеобразовательной школы – М.: Педагогический университет «Первое сентября», 2005. – 128 с.
3. Виленкин Н. Я. Популярная комбинаторика – М.: Наука, 1975. – 208 с.
4. Гнеденко Б. В., Журбенко И. Г. Теория вероятностей и комбинаторика // Математика в школе. – 2007. – № 6. – С. 67–70.
5. Загородных К. А. Возможности использования графов при обучении в начальной школе // Начальная школа. – 2004. – № 11.
6. Истомина Н. Б. и др. Математика и информатика. Учимся решать комбинаторные задачи: Тетрадь для 1–2 классов общеобразовательных организаций / Н. Б. Истомина, З. Б. Редько, Е. П. Виноградова – 10-е изд., исправ. и доп. – Смоленск: Ассоциация XXI век, 2014. – 48 с.
7. Истомина Н. Б. и др. Математика и информатика. Учимся решать комбинаторные задачи: Тетрадь для 3 класса общеобразовательных организаций / Н. Б. Истомина, З. Б. Редько, Е. П. Виноградова – 7-е изд., исправ. и доп. – Смоленск: Ассоциация XXI век, 2014. – 48 с.
8. Истомина Н. Б. и др. Математика и информатика. Учимся решать комбинаторные задачи: Тетрадь для 4 класса общеобразовательных организаций / Н. Б. Истомина, З. Б. Редько, Н. Б. Тихонова, Е. П. Виноградова – 6-е изд., исправ. и доп. – Смоленск: Ассоциация XXI век, 2015. – 56 с.

9. Стойлова Л. П. Математика: Учебное пособие для студентов педагогических вузов и колледжей по специальности «Педагогика и методика начального образования». – М.: Академия, 2007 и позже.
10. Стойлова Л. П. Способы решения комбинаторных задач // Начальная школа. – 1994. – № 1. – С. 72–77.
11. Энциклопедический словарь юного математика – М.: Педагогика, 1997.
12. http://combinatorica.narod.ru/second.htm

Оглавление

Учебное издание

Истомина Наталия Борисовна
Редько Зоя Борисовна
Тихонова Наталья Борисовна

ВНЕУРОЧНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ
Общеинтеллектуальное направление

УЧИМСЯ РЕШАТЬ КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ
Математика и информатика
1–4 классы

Программа
Примерное планирование занятий
Методические рекомендации

Редакторы *Н. Б. Тихонова, Л. М. Чересова*
Технический редактор *О. В. Клюшенкова*
Компьютерная вёрстка *О. В. Попова*
Художник *М. А. Новикова*
Корректор *И. И. Матвиешина*

Подписано в печать 15.11.2017. Формат 70x90 $^1/_{16}$.
Гарнитура SchoolBookCSanPin. Печать офсетная. Бумага офсетная.
Объём 9,0 п. л. Тираж 1000 экз. Заказ № .

ООО «Издательство «Ассоциация XXI век».
214004, г. Смоленск, ул. Николаева, 27а, 143.

Отпечатано в филиале «Смоленский полиграфический комбинат»
ОАО «Издательство «Высшая школа».
214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1.